

円周率小史 アルキメデス前後について (平成13年)

1. はじめに

アルキメデスが計算した円周率は、円に内外接する正多角形の周の長さを求めることで計算された。(アルキメデスによる円周率の計算)

彼は、円に内外接する正96角形まで計算して、円周率を小数2桁まで正しく求めた。それは、B.C.200年頃のことである。以後、円周率は、これと同じ方法で多くの数学者によって計算されたが、1610年にオランダのルドルフ(Ludolf van Ceulen(1540 ~ 1610))によって正²⁶²多角形から、小数35桁まで正しく求められた。

こうした幾何学的な方法は、スネリウス(Willebrod Snellius(1581 ~ 1626))とホイゲンス(Christian Huygens(1629 ~ 1695))によって完成されたが、この幾何学的計算は、それ以上の進歩はなく、二項定理と微分・積分法の発見を待って、グレゴリー(James Gregory(1638 ~ 1675))による円周率の級数展開公式の発見(1671年)に至る。この間、アルキメデスから数えておおよそ2000年の歳月が経過したことになる。

アルキメデスの前後の円周率について調べることにする。

2. 古代エジプトの円周率

骨董蒐集家A・ヘンリー・リンド(A. Henry Rhind)が、1858年に、エジプトのルクソールで買い求めた古代エジプトのパピルスは、現在、英国の大英博物館にある。このパピルスはリンドパピルスといわれ、古代エジプトの書記アーメス(Ahmes)が、B.C.1849年~ B.C.1801年に、古いパピルスから書き写したものとされている。

数学史家アイゼンロール(August Eisenlohr)が、1877年にこれを解読し解説を加えている。その中に、次のような文章がある。「直径9ルートヘン(長さの単位)の円の面積は、どのようになるか。直径からその $\frac{1}{9}$ を減じ、その残りを平方せよ。」

(Eisenlohr) この文章を現代流に計算すると、次のようになる。

直径を d とすると、(円の面積) = $(d - \frac{1}{9}d)^2 = (\frac{8}{9})^2 d^2$ また、円の面積は $p \left(\frac{d}{2}\right)^2$ だから、
 $(\frac{8}{9}d)^2 = p(\frac{d}{2})^2$ $p = (\frac{16}{9})^2$ 3.16

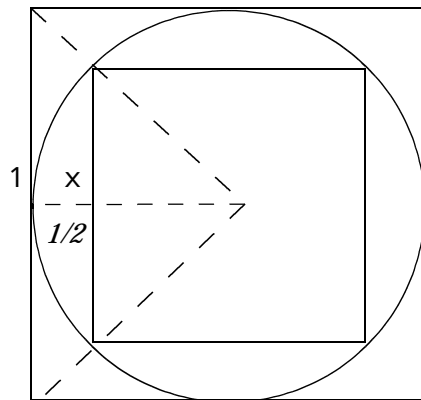
古代エジプトには、比としての円周率、すなわち $\frac{\text{円周}}{\text{直径}}$ は存在しなかったが、円周率 $(\frac{16}{9})^2$ を すなはち、3.16 として計算していたことになる。では、 $\frac{8}{9}$ はどのようにして得られたのであろうか。これには、次の三つの説がある。

(1) 直径1の円に内、外接する正方形を

考える。

$$(\text{内接正方形の一辺}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{7}}}$$

1 と $\frac{7}{9}$ の平均値として $\frac{8}{9}$ を考えたとする説。



(図1)

(2) 面積を変えないで、円をつぶして正方形を作り、計測したと考える説。

正方形の一辺を d 、円の半径を r とすると、

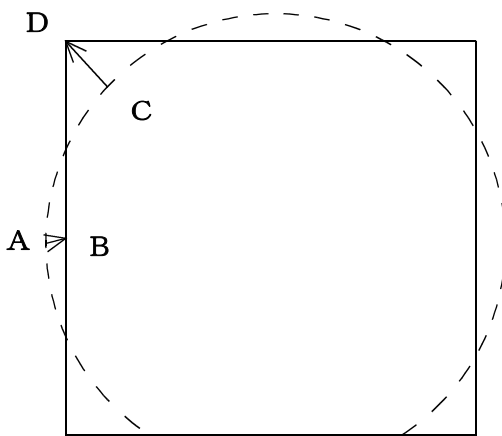
$$\widehat{AC} = \frac{8}{9} BD$$

$$\frac{2pr}{8} = \frac{8}{9} \times \frac{d}{2} \quad \frac{d}{r} = \frac{9p}{16} \dots\dots\dots$$

$$p r^2 = d^2$$

$$p = \left(\frac{d}{r}\right)^2 \dots\dots\dots$$

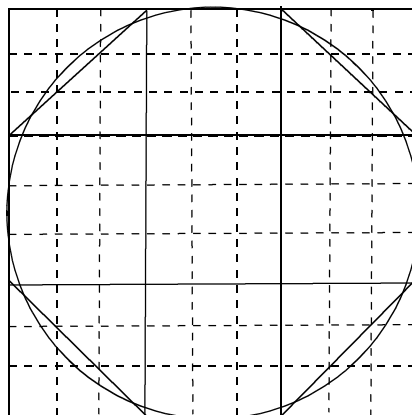
$$\text{よ} \text{り} , p = \left(\frac{16}{9}\right)^2$$



(図2)

(3) 9を一辺とする正方形に内接する円の面積を方眼を利用して計算する．
 円に含まれる方眼を面積9の正方形5個と，面積 $\frac{9}{2}$ の直角二等辺三角形4個に1を加えて64個と考えた．

$$64 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2$$



(図3)

3. 円周率の展開公式 (17世紀末から18世紀初頭)

(1) グレゴリーの展開式

次の展開式は，*James Gregory (1638 - 1675)*が，1671年に発見した式で，人類が初めて手にした円周率の展開公式で，1673年には，ライプニッツによって再発見されたといわれている．

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

証明 $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x \quad (|x| < 1)$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$x = 1 \text{ と置くと } \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

(注) この公式は，収束が遅いが，次に示す3つの展開式は，収束が速く実用的である．

(2) オイラーの展開式

$$\frac{p}{4} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \dots \right\} + \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 - \dots \right\}$$

この展開式は, *Leonhard Euler (1707 - 1783)* が 1737 年に発見した式である.

証明 $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \tan^{-1} \frac{a + b}{1 - ab}$

で $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$ とおくと

$$\tan^{-1} 1 = \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$$

$$\frac{p}{4} = \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$$

により、 $\frac{p}{4} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \dots \right\} + \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 - \dots \right\}$

(3) ハットンの公式

$$\frac{p}{4} = 3 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^5 - \dots \right\} + \left\{ \frac{5}{99} - \frac{1}{3} \left(\frac{5}{99}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{5}{99}\right)^5 - \dots \right\}$$

この展開式は, *Charles Hutton (1737 - 1823)* が発見したものである.

証明 $\tan^{-1} a - \tan^{-1} b = \tan^{-1} \frac{a - b}{1 + ab}$

で, $(a, b) = (1, \frac{1}{4}), (\frac{3}{5}, \frac{1}{4}), (\frac{7}{23}, \frac{1}{4})$ を代入すると,

$$\frac{p}{4} = \tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{3}{5}$$

$$\tan^{-1} \frac{3}{5} = \tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{7}{23}$$

$$\tan^{-1} \frac{7}{23} = \tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{5}{99}$$

$$\begin{array}{l} +) \\ \hline \frac{p}{4} = 3 \tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{5}{99} \end{array}$$

$$\frac{p}{4} = 3 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} \right)^5 - \dots \right\} + \left\{ \frac{5}{99} - \frac{1}{3} \left(\frac{5}{99} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{5}{99} \right)^5 - \dots \right\}$$

(4) マチンの公式

$$\frac{p}{4} = 4 \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right)^5 - \dots \right\} - \left\{ \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{239} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{239} \right)^5 - \dots \right\}$$

John Machin (1680 - 1751) が 1706 年に発見した展開式である。

証明 において、 $a = b = \frac{1}{5}$ とおくと、

$$4 \tan^{-1} \frac{1}{5} = 2 \tan^{-1} \frac{5}{12} = \tan^{-1} \frac{\frac{5}{12} \times 2}{1 - \left(\frac{5}{12} \right)^2} = \tan^{-1} \frac{120}{119}$$

$$\begin{aligned} 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239} &= \tan^{-1} \frac{120}{119} - \tan^{-1} \frac{1}{239} \\ &= \tan^{-1} \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \times \frac{1}{239}} = \tan^{-1} 1 = \frac{p}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{4} &= 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239} \\ &= 4 \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right)^5 - \dots \right\} - \left\{ \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{239} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{239} \right)^5 - \dots \right\} \end{aligned}$$

(5) ストーマーの公式

$$\frac{p}{4} = 6 \tan^{-1} \left(\frac{1}{8} \right) + 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{57} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{239} \right)$$

ノールウェイの数学者ストーマー (Fredrik Carl Mulertz Stormer (1874 ~ 1957) が、1896年に発見した展開式である。

証明 $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b + \tan^{-1} c = \tan^{-1} \frac{a + b + c - abc}{1 - (ab + bc + ca)} \dots\dots\dots$

において、 $a = b = c = \frac{1}{8}$ とおくと、

$$6 \tan^{-1} \frac{1}{8} = 2 \tan^{-1} \frac{191}{488}$$

$$\begin{aligned}
6 \tan^{-1} \frac{1}{8} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{57} &= 2 \tan^{-1} \frac{191}{488} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{57} \\
&= 2 \tan^{-1} \frac{91}{221} \\
&= \tan^{-1} \frac{119}{120}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6 \tan^{-1} \frac{119}{120} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{57} + \tan^{-1} \frac{1}{239} &= \tan^{-1} \frac{119}{120} + \tan^{-1} \frac{1}{239} \\
&= \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

計算の実際 (使用した計算ソフト *Mathcad 2000 Professional* (*MathSoft, Inc.*))

$$\text{Gregory's} \quad 4 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \quad \text{Euler's} \quad 4 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}}{2k-1} + 4 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}}{2k-1}$$

$$n=1 \quad 4$$

$$n=500 \quad 3.13959265558979$$

$$n=5000 \quad 3.14141050422882$$

$$n=7000 \quad 3.1414590709027$$

$$n=1 \quad 3.33333333333333$$

$$n=500 \quad 3.14156158787759$$

$$n=1000 \quad 3.14159267045069$$

$$n=1500 \quad 3.14159265357837$$

$$\text{Machin's} \quad 16 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{1}{5}\right)^{2k-1}}{2k-1} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{1}{239}\right)^{2k-1}}{2k-1}$$

$$n=1 \quad 3.18326359832636$$

$$n=90 \quad 3.14159265362355$$

$$\text{Stomer's} \quad 24 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{1}{8}\right)^{2k-1}}{2k-1} + 8 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{1}{57}\right)^{2k-1}}{2k-1} + 4 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{1}{239}\right)^{2k-1}}{2k-1}$$

$$n=1 \quad 3.15708727886662$$

$$n=7 \quad 3.14159265358984$$

参考図書

1. 円周率の歴史 平山 諦 著 1990 大阪教育図書
- 2 p の歴史 ペートル・ベックマン著 1973 田尾陽一・清水韶光訳 蒼樹書房
Petr Beckmann A History of PI The Golem Press 1971