単拡大の定理

体 Q に代数的数 $a,\ b$ を添加した体 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ は，次の式を満足する Q 上の代数的数 t が存在する．

$$\mathrm{Q}(a,\ b) = \mathrm{Q}(t) \qquad \text{ただし，} t = a + cb$$

証明

Q上 a の最小多項式を $f(x)$
Q上 b の最小多項式を $g(x)$ とする

$$f(a) = g(b) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$f(x),\ g(x)$ は Q 上既約で $f(x) = 0,\ g(x) = 0$ の根をそれぞれ

$a = a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m,\quad b = b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ とする．

$t = a + cb$ とおく

すべての $i,\ j$ について $a_i + cb_j \neq a + cb$ となるように c を定めておく

ただし $a_1 + cb_1 = a + cb$ ……　(*)

$f^*(x) = f(t - cx)$ とする

$f^*(x) \in \mathrm{Q}(t)\ [x]$

$j > 1$ に対して $t - cb_j = (a + cb) - cb_j$

$= a + c(b - b_j)$

$\therefore\ f^*(b) = f(t - cb) = f(a) = 0$ …… (2)

$f^*(b_j) = f(t - cb_j),\quad f(a_i) = 0$

(*) より $i = j = 1$ 以外で

$f(t - cb_j) \neq f(a_i)$

$\therefore\ f^*(b_j) \neq 0$ …… (3)

従って，$f^*(x)$ と $g(x)$ は(1),(2),(3) よりただ一つの共通根 b をもつから

$g(x) = x - b$

$\therefore\ b \in \mathrm{Q}(t)$

$\therefore\ a = t - cb \in \mathrm{Q}(t)$

$\therefore\ a,\ b \in \mathrm{Q}(t)$ よって $\mathrm{Q}(a,\ b) \subset \mathrm{Q}(t)$ ……(4)

また，　$t = a + cb \subset \mathrm{Q}(a,\ b)$

$$\therefore \quad \mathrm{Q}(t) \subset \mathrm{Q}(a,\ b) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(4) (5) により

$$\mathrm{Q}(a,\ b) = \mathrm{Q}(t)$$

（注）特に，$c = 0$　とすると，定理は次のように単拡大が理解出来る．

$$\mathrm{Q}(a,\ b) = \mathrm{Q}(a)$$

（注）　$\mathrm{Q}(a,\ b)$　について定理が示されると帰納的に次が示される．

$$\mathrm{Q}(a,\ b,\ \cdots,\ d) = \mathrm{Q}(a)$$