

回転移動の公式について（令和 7 年）

原点 O の周りに単位円周上を角 θ 回転する点の移動は、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

証明

三角関数の加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

円周上の 2 点 P, P' の座標を、次のように記す。

$$\overrightarrow{op} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{op'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\beta = \theta$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

（注）回転移動の公式は、三角関数の加法定理を行列表記したものである。

（別解）ベクトル $\overrightarrow{op}$ を、原点 O の周りに角 θ だけ回転する代わりに、座標軸を原点 O の周りを角 $-\theta$ 回転する。

基ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{op} &= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x' \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(注) 直交座標系 Oxy を原点 O の周りに、角 θ だけ回転した直交座標系 $Ox'y'$ とすると、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 基ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{op} &= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x' \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$