

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (a, b, c : \text{integer}) \text{ を解く.} \quad (\text{平成} 23 \text{年})$$

解 1. $(a, b, c) = d$ のとき $d = 1$ として考える.

2. a, b, c のうち 2 つが偶数で一つが奇数にならないことを示すとよい.

与えられた不定方程式は a, b の対称式である.

(a) a : 偶 b : 偶 c : 偶 のとき 不成立 $\because a, b, c$: 互いに素だから

(b) a : 偶 b : 偶 c : 奇 のとき 不成立 $\because (\text{偶})^2 + (\text{偶})^2 \neq (\text{奇})^2$

(c) a : 偶 b : 奇 c : 偶 のとき 不成立 $\because (\text{偶})^2 + (\text{奇})^2 \neq (\text{偶})^2$

(d) a : 偶 b : 奇 c : 奇 のとき 成立する.

(e) a : 奇 b : 奇 c : 奇 のとき 不成立

$$\because a^2 \equiv 1 \pmod{4}, b^2 \equiv 1 \pmod{4} \therefore a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ だから } c^2 \equiv 1 \pmod{4} \text{ で矛盾}$$

(f) a : 奇 b : 奇 c : 偶 のとき 不成立

$$\because a^2 \equiv 1 \pmod{4}, b^2 \equiv 1 \pmod{4} \therefore a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ だから } c^2 \equiv 0 \pmod{4} \text{ で矛盾}$$

3. $a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b) \dots \dots \dots (1)$

(d) のとき, (1) の具体的な構成方法を記述する.

a : 偶 b : 奇 c : 奇 だから $c - b, c + b$: 偶

$$\therefore c - b = 2m, c + b = 2n \quad (n > m) \text{ と置く } \dots \dots \dots (2)$$

$$(b, c) = 1 \text{ より } (m, n) = 1$$

$$(1), (2) \text{ より } a^2 = 4mn$$

$$a : \text{偶より } a = 2a' \text{ と置くと } a'^2 = mn$$

$(m, n) = 1$ だから

$$m = p^2, n = q^2 \quad (p, q) = 1 \text{ と置く } \dots \dots \dots (3)$$

$$(2), (3) \text{ より } a = 2pq, b = q^2 - p^2, c = p^2 + q^2$$

よって, 一般解は

$$a = 2dpq, b = d(q^2 - p^2), c = d(p^2 + q^2)$$

ただし, $d = (a, b, c)$,

(注) フェルマーの平方和の定理参照のこと