

# 日本の数学「和算」の研究（平成15年）

## はじめに

文化は、正しく理解されて次世代に引き継がれなくてはならない。また、我々一人一人は、その責任をもたなければならない。

和算は、明治維新によって断絶した。明治政府は、新しい教育制度を導入するにあたって、洋算か和算かの選択に迫られ、二転三転の末、洋算の採用に踏み切った。このことは将来に正しい選択であったが、文化継承という観点からすると大きな禍根を残した。また、現在の教育場で、数学の歴史性は、教える機会を得ていないことも問題である。

そこで、和算を西洋数学の立場からもう一度調べ直し、評価し直す必要を感じつつ、拙い研究を始めることにした。

私は、幸いにも、若い時分から和算に興味をもち、折りをみては資料の蒐集に努めてきた。また、二年前に教職をすべて退き、時間の余裕もできたので、念願の和算研究を始めることができた。何分にも老人の道楽で始めた仕事であり、公平性に欠けないように努力したつもりではある。日々折々の数学に対する思いを記して拙い研究の足取りを記してみたい。

執筆にあたって、次のことに留意した。

- 1) 和算の内容は、できる限り現行の数式で記述した。
- 2) その価値を現代数学から評価した。

## 1 乗法口訣「九九」の由来について

「九九」は、乗除計算の基である。この「九九」が、中国から本邦に伝えられたのは、奈良時代で、平安時代には、かなり広く知れわたっていたことが想像される。「万葉集」、  
「口遊」、  
「拾芥抄」など奈良、平安、室町時代の書籍に、「九九」が引用されており、万葉集を例にとると、次のように「九九」が「しゃれ」として使われている。<sup>18)</sup>

わかくさの にいたまくらを まきそめて よおやへだてむ に くく あらなくに  
「若草乃、新手枕乎、巻始而、夜哉将間、二八十一不在国」

（若草の 新手枕「新妻の枕」をまきそめて 夜おや隔てむ 憎くあらなくに）と、八十一を「九九」と読ませている。

我々は、小学校二年生のとき、この「九九」を日本語の音韻に合わせて反復暗誦してきた。これが、学校教育の原点と思われる。また、何故、「九九」と呼ばれるのか不思議に思いつつ過ごしてきた。

（注）西欧では、「乗法九九の表」（*Pythagoras' Table, Boethius' Table* と呼ばれた。）によって計算をしていた。英語の九九は、次のようなものである。（*Twice one are two. Twice two are four. ... Three times one are three. Tree times two are six. ...*）

孫氏算經（上巻）には、次の記述がある。

「九九八十一，自相乗得幾何（自ら相乗じて，幾ばくを得るや），答曰（答えて曰く），  
六千五百六十一．八九七十二，自相乗得五千一百八十四． 七九六十三，自相乗得三千九  
百六十九．…… 一二如（が）二，自相乗得四． 一一如一、自相乗得一．」

このことから、古代の「九九」は、現在と異なり逆の順に口誦していたと想像されてはいた。  
近年、古代の「九九」を記した木簡が、中国西北部の敦煌，居延から，相次いで出土し，この  
ことが確証された。

（注）中国の「九九」は，語調を整えるために，積が十未満のときは「如」または「而」が  
つかわれ，我が国では，「が」と訳されて「が唱九九」といわれる。

## 2 九章算術の「五雀六燕の術」について

「分数ができない大学生」<sup>1)</sup> が世に出て久しい。教育現場では，生徒の理数離れが問  
題になっているらしい。

先日読んだ書物の中に，こんなことが述べられていた。この現象はいまに始まったことでは  
なく，遠く平安・鎌倉時代にまで遡る。<sup>2)</sup> それを示す証拠は，「雲州往来」という書簡集  
の中にある。役人の報告書に計算のミスが多く，せめて「五雀六燕の術」までとはいかなくて  
もよいから計算だけは出来て欲しいという次のような記述がある。

「給わるところの不興状，大略披閱．神社仏寺の新造修理，十分の二三に及ばず，たしかに  
廻李（返事）につき日記，注載せらるべきなり．また正税の条，額少し足多く．算計の人，失  
錯するところか．たとえ『五雀六燕の術』に及ばずとも，豈にかくのごときあらんや．…周防  
守」<sup>3)</sup> この『五雀六燕の術』とは如何なる術であろうか。

### （1）五雀六燕の術

中国漢の時代に編纂された数学書「九章算術」の「方程の章」に，次のような問題がある。  
「いま，五つの雀と六つの燕とあり．集めてこれをはかれば，秤，雀を集めたるもの重く，燕  
を集めたるもの軽し．一つの雀と一つの燕とをかえてはかれば，秤平らかなり．なお，雀と燕  
とをすべて集めれば，その重さ一斤なり．雀燕の一羽，その重さ各々は幾ばくなるや．」<sup>4)</sup>

（解）（雀のみを記す）

（解1） 雀、燕の重さを比べると，燕一羽は雀  $\frac{3}{4}$  羽に当たる。

$$5 + \frac{3}{4} \times 6 = \frac{19}{2} \text{ (羽)}$$

$$1(\text{斤}) \div \frac{19}{2}(\text{羽}) = \frac{2}{19} \text{ (斤)} \dots\dots \text{Ans.}$$

(解2) 五雀の重さ : 六燕の重さ =  $5 \times 4 : 6 \times 3$   
 $= 20 : 18$   
 $= \frac{20}{38} : \frac{18}{38}$

五雀の重さ =  $1 \times \frac{20}{38} = \frac{20}{38}$  (斤)

一雀の重さ =  $\frac{20}{38} \div 5$   
 $= \frac{4}{38}$  (斤)  
 $= \frac{2}{19}$  (斤) .....Ans.

(解3) 雀一羽の重さを  $x$  斤, 燕一羽の重さを斤  $y$  とする.

$$\begin{cases} 5x + 6y = 1 \\ 3x = 4y \end{cases}$$

$x = \frac{2}{19}$  (斤) .....Ans.

$y = \frac{3}{4} \times \frac{2}{19} = \frac{3}{38}$  (斤)

(注) 雀1羽の重さを  $x$  斤、燕1羽の重さを  $y$  斤とする。

雀1羽を燕の側に移動すると、

雀の側 :  $5x - x$  燕の側 :  $6y + x$

続けて、燕1羽を雀の側に移動すると、

雀の側 :  $5x - x + y$  燕の側 :  $6y + x - y$

双方の重さが等しいから

$$5x - x + y = 6y + x - y$$

$$3x = 4y$$

$$x = 1 \text{ のとき } y = \frac{3}{4}$$

よって、燕1羽は、雀  $\frac{3}{4}$  羽に当たる

### 3 鶴亀算」考

鶴亀算は、算術の代名詞のように使われてきた。この「鶴亀」が、はじめて和算書に登場したのは、文化2年(1815)に坂部広胖によって著わされた「算法點鼠指南録」だといわれ

ている。<sup>12)</sup>

「爰に鶴亀合百頭あり、只云足数和して二百七十二、鶴亀各何ほどと問。答曰、鶴六十四、亀三十六。術曰、亀の足数(四)を置、内鶴の足数(二)を減じ、余(二となる)法とす。爰に云数を置、亀の足数(四)を掛(四〇〇となる)、内只云を減じ、余(一二八となる)、法にて割(六四となる)、鶴の数とす。」

(解) 100頭すべてを亀とすると、亀の足の総数は  $4 \times 100$  足  
 $4 \times 100 - 272$  は鶴の足の総数で、鶴1羽は2足だから  
 $(4 \times 100 - 272) \div 2 = 64$  (羽)

(別解) 鶴の数を  $x$ 、亀の数を  $y$  とする。

$$100 - x = y \dots\dots\dots(1)$$

$$(1) \times 4: \quad 400 - 4x = 4y$$

$$\text{足の総数が } 272 \text{ だから} \quad 2x + (400 - 4x) - 272 = 0$$

$$x = 64$$

我々が、小学生のころに教わったのは(解)の方法で、中学校に上がって連立方程式を習って以後は(別解)のように解いている。連立方程式は、既に「九章算術」によって我が国に伝えられており、「九章算術」は、次のように記している。

「九章算術」方程の章第一題<sup>8)</sup>

「いま上禾三秉(たば)と中禾二秉と下禾一秉は、実三十九斗になり、上禾二秉と、中禾三秉と下禾一秉は、実三十四斗、上禾一秉と中禾二秉と下禾三秉は、実二十六斗になる。上中下禾の実は、一禾それぞれいくらか。(注) 禾: 餅粟<sup>7)</sup>

(解) 上禾、中禾、下禾一秉の実の量をそれぞれ  $x$ 、 $y$ 、 $z$  とする。

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \dots\dots\dots (1) \\ 2x + 3y + z = 34 \dots\dots\dots (2) \\ x + 2y + 3z = 26 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

$$(2) : 6x + 9y + 3z = 102 \dots\dots\dots (4)$$

$$(4) - (1) - (1) : 5y + z = 24 \dots\dots\dots (5)$$

$$3 \times (3) : 3x + 6y + 9z = 78 \dots\dots\dots (6)$$

$$(6) - (1) : 4y + 8z = 39 \dots\dots\dots (7)$$

同様に(5),(7)より

$$x = 9\frac{1}{4}, \quad y = 4\frac{1}{4}, \quad z = 2\frac{3}{4}$$

## 4 九章算術の「開平計算」

我々は、中学校で開平計算を教わった。適切な時期に教わったものは、年をとっても決して忘れることはない。時期を逸したり、不適切な教え方をすれば、今話題になっている「分数ができない大学生」が出来上がる。

この計算が中国から我が国に伝えられたのは、奈良時代のころで、数学書「九章算術」によってもたらされた。算木による解法であるが、現在我々が行っている開平法に近い。

小広章第12題には、 $\sqrt{55225}$  を求めることが記されている。この解法を現代の数式を用いて記してみたい。<sup>7), 8)</sup>

$200^2 < 55225 < 300^2$  だから  $\sqrt{55225}$  は、 $200$  と  $300$  の間にあることが分る。

$$55225 = (200 + x)^2 \quad \text{とおく}$$

$$(400 + x)x = 15225$$

推し量って  $30 \quad x < 40$

$$x = 30 + y \quad \text{とおく}$$

$$\{400 + (30 + y)\}(30 + y) = 15225$$

$$(460 + y)y = 2325$$

推し量って  $5 \quad y < 6$

$$y = 5$$

$$\sqrt{55225} = 235$$

## 5 勾股(三平方)の定理

「直角三角形の直角を挟む二辺の平方の和は、直角に対する辺の平方に等しい。」これがあの有名な「三平方の定理」である。<sup>15)</sup>

古代ギリシャのピタゴラス学派が証明したと言われるので、ピタゴラスの定理ともいう。現在、残っている最古の証明は、ユークリッドの「幾何学原論」にある。<sup>13)</sup>

この定理の特別の場合「辺の長さの比が  $3 : 4 : 5$  のとき、この三角形は直角三角形である。」は、古くから知られており、古代エジプトやメソポタミアでは、土木や建築で直角を描く場面で利用されていた。また、古代中国でも早くから知られていた。<sup>14)</sup>

(注)<sup>14)</sup> リンドパピルス (*B.C.1849 - B.C.1801*) には、数の組  $1, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}$  が記述されている。

バビロニアの粘土板には、縦横の長さがそれぞれ  $a, b$  の長方形について、対角線の長さを次の近似式を用いて求めている。<sup>14)</sup>

$$\sqrt{a^2 + b} \quad a + \frac{b}{2a}$$

中国の前漢初期（紀元前二世紀）に著わされた天文学書「<sup>しゅうひさんけい</sup>周髀算經」には、次の記述がある。  
 7), 8), 10) 「從髀至日下六萬里，而髀無影，從此以上至日則八萬里，若求邪至日者，以日下為  
 勾日高為股，勾股各自乘并，而開方除之」（髀「棒」より日下「太陽の真下」まで六万里あり、  
 そこでは髀の影はない．ここから日までは八万里ある．若し日まで邪「弦」を求めようとする  
 なら、「棒から」日下までを勾，日高「太陽の高さ」を股とすると，勾股各々の自乗「二乗」  
 を并せ「加え」て開平すればよい．）

（注）古来から，中国では，直角三角形の各辺に名を付している．直角を挟む短辺，長辺を  
 それぞれ勾，股，直角に面する辺を弦と呼び，我が国でも江戸末期まで勾，股，弦が使われた．  
 （英語圏では，弦のみが *hypotenuse* と命名されている．）三平方の定理は，「勾股の理」  
 とか「股弦の理」，「勾股弦の理」などといわれていた．

中国では，<sup>しょうそう くんけい</sup>趙爽（君卿）が，初めて「勾股の定理」に詳しい証明を与えたと云われている．  
 「勾股円方図」の中で，次のように定理を述べて証明している． 7), 8)

「勾股各自乗，并之為弦実，開方除之，即弦」（勾股各々を自乗「二乗」し，并せて「加え  
 て」弦実「弦の平方」となす．これを開方すれば，  
 即ち弦なり．）

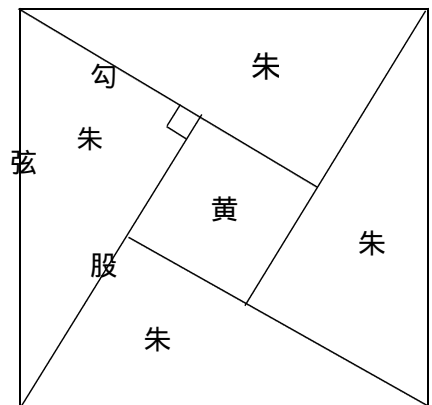
（案ずるに，弦図で勾と股を相乗すると朱の実  
 「面積」二個となり，これを倍にして，朱の実四  
 個となる．勾と股の差を自乗すると中の黄の実と  
 なり，朱と黄の実を加えると弦の実となる．）

$a, b, c$  をそれぞれ勾，股，弦とすると

一朱実 は  $\frac{1}{2}ab$ ，四朱実 は  $2ab$ ，黄実 は  $(b - a)^2$

$$2ab + (b - a)^2 = c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



弦 図

（注）趙爽は，三国呉の人と考えられている． 7)

奈良時代に，本邦に伝えられた「九章算術」勾股章に，次のように記されている． 7)

「今有勾三尺，股四尺，問為弦幾何．答曰，五尺．」（今勾三尺，股四尺あり．弦幾ばくと  
 なすかと問う．答えて曰く，五尺．）また，（勾と股を自乗し，併せて開方に除くと，則ち弦  
 なり．又，股の自乗を，弦の自乗から減じ，其の余りを開方に除くと，則ち，勾なり．又，勾  
 の自乗を，法「弦」の自乗から減じ，其の余りを開方に除くと，則ち，股なり．）と詳しく解  
 法を記している．

## 6 塵劫記じんごうきの「百五減という算」について

塵劫記は、江戸期の初め吉田光由によって著わされた本邦最初の庶民のための算術書である。初版は、寛永四年（1627）に出版されている。塵劫とは、仏教用語の塵点劫を意味し、「永劫」の意である。<sup>5)</sup>

### 第43 百五減という算

碁石、あるいは八十六ある時に、この八十六の数を知らずして、この数なにほどという時に、まづ、七つつ引く時に残る半、二つあるといふ。また、五つつ引く時には、残る半に、一あるといふ。また、三つつを引く時には、残る半、二つあるといふ。この半ばかりを聞いて、この数をいふなり。 八十六ありといふなり。

法に、七つつの時、半一つを十五の算用に入れ、三十と置き、また、五つつの半を一つ二十一と入れて置き、また、三つつの時の半を、一つを七十つつの算用にして、百四十と入れて、三口合百九十一ある時、百に余る時には、百五をはらひ、残り八十六といふなり。<sup>5)</sup>

$$15 \times 2 + 21 \times 1 + 70 \times 2 - 105 = 86$$

3つの数  $7a + 2$ ,  $5b + 1$ ,  $3c + 2$  から  $7$ ,  $5$ ,  $3$  で割ると余りがそれぞれ  $2$ ,  $1$ ,  $2$  となる数をつくる。

$$P = p(5 \times 3 \times 2) + q(7 \times 3 \times 1) + r(7 \times 5 \times 2)$$

$$= 30p + 21q + 70r \quad \text{とおく}$$

$$P \equiv 2 \pmod{7} \quad 30p \equiv 2 \pmod{7}$$

$$p \equiv 1 \pmod{7} \quad p = 1$$

$$P \equiv 1 \pmod{5} \quad 21q \equiv 1 \pmod{5}$$

$$q \equiv 1 \pmod{5} \quad q = 1$$

$$P \equiv 2 \pmod{3} \quad 70r \equiv 2 \pmod{3}$$

$$r \equiv 2 \pmod{3} \quad r = 3$$

$$P = 15 \times 2 + 21 \times 1 + 70 \times 2$$

$P$ は、 $3$ ,  $5$ ,  $7$ で割ると、余りがそれぞれ  $2$ ,  $1$ ,  $2$ となる。 $105$ より大きいときは  $105$ を引くから「百五減の算」と呼んでいる。

$$P - 105 = 15 \times 2 + 21 \times 1 + 70 \times 2 - 105 = 86$$

$$\text{(解1)} \quad x - 2 = 7l, \quad x - 1 = 5m, \quad x - 2 = 3n \quad (l, m, n: \text{整数})$$

$$x - 2 = 21p, \quad x - 1 = 5m \quad (p: \text{整数})$$

$$x > 0 \text{ より } p > -\frac{2}{21} \text{ で、} 5m - 21p = 1$$

$$p = 4 \text{ のとき } m = \frac{85}{5} = 17 \text{ で適す}$$

$$x = 1 + 5 \times 17 = 86 \quad \dots \text{Ans.}$$

(解2) 中国の剰余の定理 (*Chinese remainder theorem*) は、5世紀中頃の書籍「孫子算経」<sup>そんしさんけい</sup> 下巻26題に次のように記されている。

「いま物あり、その数はわからない。これを3個ずつ数えると2個余り、5個ずつ数えると3個余り、7個ずつ数えると2個余る。物の数はいくらあるか。答23。」<sup>6)</sup>

このことから、次の解法は、中国の剰余の定理と呼ばれ、ガウスが1801年出版の「整数論」で証明している。

$$\begin{cases} x & 2 \pmod{7} \\ x & 1 \pmod{5} \\ x & 2 \pmod{3} \end{cases}$$

3, 5, 7は、2つつ互いに素だから、

$$15u + 21v + 35w = 1 \quad (u, v, w : \text{整数})$$

特殊解  $u = v = 1, w = -1$

$$x = 2 \times (5 \times 3) \times 1 + 1 \times (7 \times 3) \times 1 + 2 \times (7 \times 5) \times (-1)$$

$$= -19 \pmod{105}$$

$$x = 105k - 19 \quad (\text{一般解})$$

$$k = 1 \text{ のとき } x = 86 \quad \dots \dots \text{Ans.}$$

## 7 「天元術」による方程式の解法

中国元の朱世傑<sup>しゅせいけつ</sup>が著わした「算学啓蒙」(上中下三巻)が、16世紀末の秀吉による朝鮮出兵により我が国にもたらされた。

この書籍には、宋・元時代の数学全般が書かれている。なかでも第三巻末には、算木<sup>さんぎ</sup> (算籌<sup>さんちゅう</sup>) による代数である「天元術」によって、二次および三次方程式の近似解がホーナー法で解かれている。<sup>7)</sup> (注)<sup>8)</sup> ルフィニー(*P. Ruffini*) とホーナー(*G. Horner*) が、1804年にそれぞれ独立に発見した方法である。

天元術では、次のように問題が解かれる。

(1) 最初に「天元の一を立てて某<sup>なにがし</sup>とする。」で始まる。

これを現代的にいえば、「未知数を某とする。」に当たる。このことから、この代数は、「天元術」と名付けられた。<sup>11)</sup>

(2) 与えられた問題の条件から、二つの相等しい多項式を作る。

(3) 両者を互いに減じて(移項して)、一端が零の方程式を得る。

(4) 方程式を解く。

このように、「天元術」は方程式を解くアルゴリズムと、次に示す一元高次方程式の近似解を求める解法を確定した。<sup>7)</sup>



天元術による方程式の解法

「九章算術」少広章第十九題から，開立計算の解法を現代的に記してみよう．  
いま，体積が百八十六万八百六十七立方尺の立体がある．問う，一辺の長さ．

(解) 一辺をと  $x$  すると， $x^3 = 1860867$

$$x^3 - 1860867 = 0$$

$x = 100x_1$  .....(1) とおくと

$$1000000x_1^3 - 1860867 = 0$$

1  $x < 2$  だから，推し量って  $x_1 = 1...$

(1)より  $x = 1*....$

$x_2 = 10(x_1 - 1)$  .....(2) とおくと

	<i>1000000</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>- 1860867</i>
<i>1</i>	<i>1000000</i>	<i>100000</i>	<i>100000</i>	<i>1000000</i>
	<i>1000000</i>	<i>1000000</i>	<i>1000000</i>	<i>- 860867</i>
		<i>1000000</i>	<i>2000000</i>	
	<i>1000000</i>	<i>2000000</i>	<i>3000000</i>	
		<i>1000000</i>		
	<i>1000000</i>	<i>3000000</i>		

$$1000000(x_1 - 1)^3 + 3000000(x_1 - 1)^2 + 3000000(x_1 - 1) - 860867 = 0$$

(2)より

$$1000x_2^3 + 30000x_2^2 + 300000x_2 - 860867 = 0$$

2  $x_2 < 3$  だから，推し量って  $x_2 = 2*....$

(1),(2)より  $x = 120$

$x_3 = 10(x_2 - 2)$  .....(3) とおくと

	<i>1000</i>	<i>30000</i>	<i>300000</i>	<i>- 860867</i>
<i>2</i>	<i>2000</i>	<i>64000</i>	<i>728000</i>	
	<i>1000</i>	<i>32000</i>	<i>364000</i>	<i>- 132867</i>
		<i>2000</i>	<i>68000</i>	
	<i>1000</i>	<i>34000</i>	<i>432000</i>	
		<i>2000</i>		
	<i>1000</i>	<i>36000</i>		

$$1000(x_2 - 2)^3 + 36000(x_2 - 2)^2 + 432000(x_2 - 2) - 132867 = 0$$

(3)より

$$1000x_3^3 + 36000x_3^2 + 432000x_3 - 132867 = 0$$

3  $x_3 < 4$  だから,  $x_3 = 3$  が確定する.

(1),(2),(3)より  $x = 123$

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 360 \quad 43200 \quad - \quad 132867 \\
 3 \mid \quad \quad \quad 3 \quad 1089 \quad 132867 \\
 \hline
 1 \quad 363 \quad 44289 \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

(注) 天元術は, 南宋末から元の初めに起こり, 李治・朱世傑らによって系統的にまとめられ, 書籍に叙述された. この算木による代数は, 13世紀ごろから普及した算盤に取って代わられ, まもなくして中国から失われた. 一方, 朝鮮半島に伝えられた天元術は, 我が国に伝えられ, 「和算」として新たな発展を遂げるのである.

## 8 「算木」という名の計算機

中国では, 古代から数の表記や計算には算籌さんちゆうという十センチの竹棒が使われた. 我が国に伝えられて, 算木さんぎと呼ばれるようになった.

算木は, 次のように縦横斜めに並べて, 一位の数は縦式, 十位の数は横式と位数が上がるごとに縦横を交互に繰り返して数を表した. 空位は, 空欄としていたが, 筆算の必要から○を記すようになった.

### (1) 記数法

縦式 ○ | || ||| |||| T T T T | || ||| ...  
 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 100 200 300 400

横式 — = ≡ ≡ ≡ ⊥ ⊥ ⊥ ≡ — = ≡ ≡ ...  
 10 20 30 40 50 60 70 80 90 1000 2000 3000 4000

例 — |||| ○ || ..... 1502 — |||| ○ || ..... 1502

負の数は, 末位の数字上に算木を斜めに置いた.

例 — |||| ..... - 15

### (2) 四則算法 加法と減法は, 今日こんにちの筆算と同様に計算する.

加法 被加数  $\begin{array}{|l} \text{|||} \equiv \text{T} \equiv \text{||} \\ \text{=} \equiv \text{T} \\ \text{|||} \perp \text{T} \equiv \text{T} \end{array}$   $43792 + 3056 = 46848$   
 加数  
 和

被減数	Ⅲ ≡ ㊦ ≡ Ⅱ
減数	≡ ≡ ㊦
差	Ⅲ ㊦ ≡ ㊦

$$43792 - 3056 = 40736$$

乗法

1)  $365 \times 14$  算木を次のように置く .

被乗数	Ⅲ 上 ⅢⅢ
積	
乗数	— ⅢⅢ

以下, 算用数字で記すこととする .

2) 乗数 14 の末尾を被乗数 365 の最上位の数字 3 の下に置く .

365
3
14

365
14

3) 3 を 1 に掛けて 3, これを 1 の上に置く .

4) 3 を 4 に掛けて 12, 12 を 4 の上に置く .

5) 乗数 14 を一桁下げる .

365
42
14

365
42
14

6) 6 を 1 に掛けて 6, 6 を 1 の上に置く .

7) 6 を 4 に掛けて 24, 24 を 4 の上に置く .

365
504
14

365
48
14

8) 乗数 14 を一桁下げる .

9) 5 を 1 に掛けて 5, 5 を 1 の上に置く .

10) 5 を 4 に掛けて 20, 20 を 4 の上に置く .

365
509
14

365
504
14

答 5110

365
5110
14

除法

1)  $1024 \div 26$  算木を次のように置く .

商	
被除数	— ≡ Ⅲ
除数	≡ ㊦

以下, 算用数字で記すこととする .

2) 除数 26 の最高位を被除数の二位の下に置く .

$$\begin{array}{r} 1024 \\ 26 \end{array}$$

3) 3 が立ち , 3 を 2 に掛けて 6 , 10 から 6 を引く .

$$\begin{array}{r} 3 \\ 424 \\ 26 \end{array}$$

4) 3 を 6 に掛けて 18 , 42 から 18 を引く .

$$\begin{array}{r} 3 \\ 244 \\ 26 \end{array}$$

5) 除数 26 を一桁下げる .

$$\begin{array}{r} 3 \\ 244 \\ 26 \end{array}$$

6) 商 9 が立ち , 9 に 2 を掛けて 18 となり , 24 から 18 を引く .

$$\begin{array}{r} 39 \\ 64 \\ 26 \end{array}$$

7) 9 を 6 に掛けて 54 , 64 から 54 を引く .

答 商 39 余り 10

$$\begin{array}{r} 39 \\ 10 \\ 26 \end{array}$$

( 3 ) 方程式の表し方

1) 一元整方程式

$$x^2 - 18x + 35 = 0$$

$$\equiv \text{||||} \quad - \text{卍} \quad |$$

2) 連立一次方程式

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} | & || & ||| \\ || & ||| & || \\ ||| & | & | \\ =\text{T} & \equiv \text{||||} & \equiv \text{||||} \end{array}$$

9 和算の誕生

( 1 ) 移入算書の解読

奈良朝から平安朝初期にかけて , 中国から算書が多数本邦にもたらされた . そのなかには , 「しゅうひさんけい周髀算經」 , 「てつじゅつ綴術」 , 「九章算術」 , 「そんしさんけい孫氏算經」 など 5 5 部 1 7 5 卷あったという . ( 日本国在所目録 8 8 9 ~ 8 9 7 ) この算書移入を第一期の移入という . <sup>9)</sup>

この移入算書は , 十分に消化されないままに , 平安期中期ころから , 数学の衰退 ( 平安期の理数離れ ) が始まり , 「九章算術」を除くすべての算書が失われていった .

続く移入第二期は , 秀吉による朝鮮出兵 ( 1 5 9 2 , 1 5 7 9 ) で , 我が国に持ち帰られた算書に 「算学啓蒙」 , 「楊輝算法」がある . また , 南方貿易により 「算法統宗」が移入され , 和算誕生に貢献することになる .

万治元年（1658）久田玄哲が、「算学啓蒙」の復刻として、「算学啓蒙新編」を著わし、天元術の解説が始まる。

寛文11年（1671）沢口一之が「古今算法記」7巻5冊を著わし、我が国ではじめて天元術で問題が解かれる。元禄3年（1690）には、<sup>たけべかたひろ</sup>建部賢弘の「<sup>げんかい</sup>算学啓蒙諺解大成」で、「算学啓蒙」の解説が終了する。

(2) 「<sup>てんざんじゆつ</sup>点竄術」の成立

前節で見たように、天元術は変数が一つで、具体的な数を係数にもつ方程式が扱われた。また、等号や括弧がなく、算木を使うという制約があり、紙上に記述することが難しく、暗算がいつも必要であった。こうした不便さを解消したのが、関孝和によって考案された、次のような筆記代数である。

- 1) 未知数は、甲、乙、丙...、子、丑、寅...などの文字を使用して、変数が二個以上で文字係数の整方程式を扱うことができるようにした。
- 2) 傍書法とよばれる次のような記号が考案され、計算過程が紙上で記述できるようになった。

$$\begin{array}{ll}
 a \dots\dots\dots | \text{甲} & 2a \dots\dots\dots \parallel \text{甲} \quad \text{または} \quad | \text{甲二} \\
 a + b \dots\dots \left| \begin{array}{l} \text{甲} \\ \text{乙} \end{array} \right. \quad \text{または} \quad | \text{甲} | \text{乙} & a - b \dots\dots \left| \begin{array}{l} \text{甲} \\ \text{乙} \end{array} \right. \quad \text{または} \quad | \text{甲} \backslash \text{乙} \\
 ab \dots\dots\dots | \text{甲乙} & \frac{a}{b} \dots\dots \text{乙} | \text{甲}
 \end{array}$$

(注) 除の記号は、孝和以後考案された。

$$\begin{array}{ll}
 x^2 \dots\dots\dots \left| \begin{array}{l} \text{甲} \\ \text{巾} \end{array} \right. & \sqrt[16]{x^3} \dots\dots\dots \left| \begin{array}{l} \text{甲} \\ \text{再} \\ \text{乘} \\ \text{巾} \end{array} \right. \quad \text{または} \quad | \text{甲再乘巾} \\
 \sqrt{x} \dots\dots\dots \left| \begin{array}{l} \text{甲} \\ \text{開} \\ \text{平} \\ \text{商} \end{array} \right. \quad \text{または} \quad | \text{甲開平商} & \sqrt[3]{x} \dots\dots\dots \left| \begin{array}{l} \text{甲} \\ \text{開} \\ \text{立} \\ \text{商} \end{array} \right. \quad \text{または} \quad | \text{甲開立商}
 \end{array}$$

(注) 傍書法には、等号や括弧の記号が無く、因数分解が出来ないという欠点もあった。

関孝和は、1674年（延宝2年）に点竄術を用いて「発微算法」を著わし、我が国の数学が、数学史上はじめて中国数学の影響から離れて独自の歩み始める。

(注) 一般に数学史上、和算とは「点竄術」成立以後の数学を指す。<sup>9)</sup>

10 「<sup>じょいち</sup>剩一」「零約」という術

関孝和の遺編「括用算法」は、正徳二年（1712）大高由昌により出版された。この「括用算法」の諸約之法に「剩一」の術、「零約」の術が記されている。前者は、不定方程式の解

法で、後者は、連分数の原形ともいえる無限小数を分数で近似する方法である。

(1) 「剰一」の術

次の不定方程式  $19x - 27y = 1$  を満足する整数  $x, y$  に対して  $19x$  の値を求める問題が記され、この解法を「剰一」と云っている。<sup>16), 17)</sup>

「いま、左19を以て、これを累加し、得たる数あり、右27を以て、これを累減して1を余す。左の総数は幾ばくなるかを問う。答に曰く、左の総数190。

術に曰く、左19を以て右27を除き(割り)、商(甲商)1、不尽(余り)(甲不尽)8を得る。

甲不尽8を以て左19を除き、商(乙商)2、不尽(乙不尽)3を得る。

乙不尽3を以て甲不尽8を除き、商(丙商)2、不尽(丙不尽)2を得る。

丙不尽2を以て乙不尽3を除き、商(丁商)1、不尽(丁不尽)1を得る。

かくして、余りが左1で(この操作を)止める。」

左		右	
19		27	
	甲商 1	甲不尽 8	$27 = 19 \times 1 + 8$
乙商 2	乙不尽 3		$19 = 8 \times 2 + 3$
	丙商 2	丙不尽 2	$8 = 3 \times 2 + 2$
丁商 1	丁不尽 1		$3 = 2 \times 1 + 1$

「甲商と乙商を掛け、定数1を加えて3を得る。これを子とする。子と丙商を掛け、甲商を加えて7を得る。これを丑とする。丑と丁商を掛けて、子を加え10を得る。左19を以てこれに掛け、左総数190を得る。問に合う。」

$$\begin{aligned}
 \text{甲商} \times \text{乙商} + 1 &= \text{子} & 1 \times 2 + 1 &= 3 \\
 \text{子} \times \text{丙商} + \text{甲商} &= \text{丑} & 3 \times 2 + 1 &= 7 \\
 \text{丑} \times \text{丁商} + \text{子} &= \text{寅} & 7 \times 1 + 3 &= 10 \\
 \text{左総数} &= 19 \times 10 = 190
 \end{aligned}$$

(解) 不定方程式  $19x - 27y = 1$  の一般解を、ユークリッドの互助法を利用して求める。

$$27 = 19 \times 1 + 8 \quad \text{だから} \quad 19x - (19 \times 1 + 8)y = 1$$

$$19(x - y) - 8y = 1$$

$$x - y = x' \quad \text{とおく} \dots\dots\dots (1)$$

$$19x' - 8y = 1$$

$$19 = 8 \times 2 + 3 \quad \text{だから} \quad (8 \times 2 + 3)x' - 8y = 1$$

$$8(2x' - y) + 3x' = 1$$

$$2x' - y = y' \text{ とおく} \dots\dots\dots (2)$$

$$8y' + 3x' = 1$$

$$8 = 3 \times 2 + 2 \quad \text{だから} \quad (3 \times 2 + 2)y' + 3x' = 1$$

$$3(2y' + x') + 2y' = 1$$

$$2y' + x' = z' \text{ とおく} \dots\dots\dots (3)$$

$$3z' + 2y' = 1$$

$$3 = 2 \times 1 + 1 \quad \text{だから} \quad (2 \times 1 + 1)z' + 2y' = 1$$

$$2(z' + y') + z' = 1$$

$$z' + y' = -p \text{ とおく} \dots\dots\dots (4)$$

$$-2p + z' = 1$$

$$z' = 1 + 2p \dots\dots\dots (5)$$

$$(4), (5) \text{より} \quad y' = -1 - 3p \dots\dots\dots (6)$$

$$(3), (5), (6) \text{より} \quad x' = 3 + 8p \dots\dots\dots (7)$$

$$(1), (6), (7) \text{より} \quad y = 7 + 19p \dots\dots\dots (8)$$

$$(1), (6), (7) \text{より} \quad x = 10 + 27p \dots\dots\dots (9)$$

一般解は  $x = 10 + 27p, y = 7 + 19p$  ( $p$  は整数)

$$p = 0 \text{ とおくと } x = 10, y = 7$$

$$19x = 190$$

(2) 「零約」の術

無限小数(奇零小数といっている)を分数で近似する方法(術)の一つである。

「方(正方形の一辺)一尺, 斜(正方形の対角線)一尺四寸一分四厘二毛一糸強有り。零約之内, 外, 親, 疎の方率, 斜率は各々幾いくばくなるかと問う。」

(正方形の一辺を1尺としたとき, 対角線 1.41421 強尺の近似分数を求めよ。)<sup>17)</sup>

「答えて曰く, 内にして疎(の)方率五, 斜率七。外にして疎(の)方率七, 斜率一十。内にして親(の)方率二十九, 斜率四十一。外にして親(の)方率四十一, 斜率五十八。」

(答は, 次の分数である。)

	内		外
疎	$\frac{\text{斜率}7}{\text{方率}5}$	$<$	$\frac{\sqrt{2}}{1}$
		$<$	$\frac{\text{斜率}10}{\text{方率}7}$
親	$\frac{\text{斜率}41}{\text{方率}29}$	$<$	$\frac{\sqrt{2}}{1}$
		$<$	$\frac{\text{斜率}58}{\text{方率}41}$

「術に曰く、斜率一、方率一を初（初項）と為す。斜率を以て実（分子）と為し、方率を以て法（分母）と為す。」

（解き方として、分子を斜率、分母を方率とし、それぞれの初項を1とする。）

「実（分子）は、法（分母）の如く而も一にして得る数 一位を尺に定む 原斜に於いて少（のとき）は、斜率二、方率一、原斜に於いて多（のとき）は、（初の）斜率一、法率一を各（々）之に累加して、内外親疎の方斜率を得る。」

（分母には常に一を加え、その数が、 $\sqrt{2}$  より小さいときは、分子に2を、大きいときは分子に1を加えて作った分数列である。）<sup>17)</sup>

$$\frac{\text{初}}{\text{斜率1}} \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \frac{9}{6}, \frac{10}{7}, \dots, \frac{41}{29}, \dots, \frac{58}{41}, \dots$$

（解）我々は、連分数を用いて、次のように計算する。

$$\sqrt{2} = 1.41421\dots \quad \frac{141421}{100000} \text{ だから}$$

ユークリッドの互助法で、

$$\begin{array}{ll} 141421 = 100000 \times 1 + 41421 & \frac{141421}{100000} = 1 + \frac{1}{\frac{100000}{41421}} \\ 100000 = 41421 \times 2 + 17158 & \\ 41421 = 17158 \times 2 + 7105 & \\ 17158 = 7105 \times 2 + 2948 & \frac{100000}{41421} = 2 + \frac{1}{\frac{41421}{17158}} \\ 7105 = 2948 \times 2 + 1209 & \\ 2948 = 1209 \times 2 + 530 & \frac{41421}{17158} = 2 + \frac{1}{\frac{17158}{7105}} \\ 1209 = 530 \times 2 + 149 & \\ 530 = 149 \times 3 + 83 & \\ 149 = 83 \times 1 + 66 & \dots\dots\dots \\ 66 = 17 \times 3 + 15 & \\ 17 = 15 \times 1 + 2 & \frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2} \\ 15 = 2 \times 7 + 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} & \frac{141421}{100000} \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \\ & \quad \frac{3}{2} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{17}{12} \quad \frac{41}{29} \quad \frac{99}{70} \quad \frac{239}{169} \end{aligned}$$



(注) 関孝和の「零約」は、連分数に比べると大変原始的であるが、孝和の門弟、建部賢弘および兄の賢明は、師の「零約」を完全な連分数へと発展させた。<sup>16)</sup>

## 1 1 文字消去の術「行列式」

関孝和は、天和三年(1683)「解伏題の法」を著わし、そのなかで自らが発見した「行列式」の理論を記している。

まず、「換式第四」では、 $m$ 次と $n$ 次( $m < n$ )の二つの式から $n-1$ 次の $n$ 個の方程式を導く方法が記され、「生尅第五」で、行列式の理論が記されている。

### (1) 換式第四

「仮如(例えば)、前式平方(二次方程式の前式)後式平方(二次方程式の後式)があり、

$$\text{前式} \quad -\text{丙} - \text{乙} x + \text{甲} x^2 = 0$$

$$\text{後式} \quad -\text{己} + \text{戊} x - \text{丁} x^2 = 0$$

正の甲を以て、あまねく遍後式に乘じ、負の丁を以て、遍前式に乘じ、之を相減じて、一式を得る。

$$\text{一式} \quad -(\text{丁丙} + \text{己甲}) + (-\text{丁乙} + \text{戊甲}) x = 0$$

負の乙を以て

遍後式に乘じて、一式に加え、正の戊を以て、遍前式に乘じ、一式を減じ、二式を得る。

$$\text{二式} \quad (\text{戊丙} + \text{己乙}) - (\text{丁丙} + \text{己甲}) x = 0$$

現代風に記すと、次のようになる。

甲を  $a$ 、 $-\text{乙}$ を  $b$ 、 $-\text{丙}$ を  $c$ 、 $-\text{丁}$ を  $d$ 、 $\text{戊}$ を  $e$ 、 $-\text{己}$ を  $f$  とすると、

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 & \dots\dots\dots(1) \\ dx^2 + ex + f = 0 & \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

$$(1) \times d : ad x^2 + bd x + cd = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$(2) \times a : ad x^2 + ae x + af = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$(4) - (3) : \text{一式} : (ae - bd) x + (af - cd) = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

(注) 2次の項を消去した。

$$(2) \times b : bd x^2 + be x + bf = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$(1) \times e : ae x^2 + bex + ce = 0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$(6) - (7) : (bd - ae) x^2 + (bf - ce) = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$(5) \text{より} (ae - bd) x^2 + (af - cd) x = 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

(8) (9) より $x^2$ を消去すると、

$$\text{二式} : (af - cd) x + (bf - ce) = 0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

(注) 1 次の項を消去しているが，定数項を消去してもよい。

このように文字消去では，行列式  $ae - bd, af - cd, bf - ce$  が問題となる。

(2) 生尅第五 附、交式・斜乗

(a) 附

「換式を得て，<sup>さんじ</sup>芟治を<sup>こころ</sup>驗むる<sup>ののち</sup>之後，<sup>せいこく</sup>生尅を求むる也。仮如（たとえば），

$$\text{一式} \quad \text{丙} + \text{乙} x + \text{甲} x^2 = 0$$

$$\text{二式} \quad \text{己} + \text{戊} x + \text{丁} x^2 = 0$$

$$\text{三式} \quad \text{壬} + \text{辛} x + \text{庚} x^2 = 0$$

丙戊庚 生	一 乙戊庚	四 甲戊庚
己辛甲 生	二 甲戊辛	五 甲丁辛
壬乙丁 生	三 乙丁辛	六 乙丁庚

丙辛丁 尅	三 乙丁辛	五 甲丁辛
己乙庚 尅	一 甲戊庚	六 乙丁庚
壬戊甲 尅	二 甲戊辛	四 甲戊庚

(注) 「生」は正（プラス），「尅」は負（マイナス）の意である。「芟治」は換式の係数が共通因数をもつとき，これを除くことである。

これを，現代的に記すと次のようになる。

甲を  $a$ ，乙を  $b$ ，丙を  $c$ ，丁を  $d$ ，戊を  $e$ ，己を  $f$ ，庚を  $g$ ，辛を  $h$ ，壬を  $i$  とすると，

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 & \dots\dots (1) \\ dx^2 + ex + f = 0 & \dots\dots (2) \\ gx^2 + hx + i = 0 & \dots\dots (3) \end{cases}$$

(1), (2), (3) より  $x, x^2$  を消去する。

$$(1) \times (-eg) : \quad - aeg x^2 - beg x - ceg = 0 \quad \dots\dots (4)$$

$$(1) \times dh : \quad adh x^2 + bdh x + cdh = 0 \quad \dots\dots (5)$$

$$(2) \times (-ah) : \quad - adh x^2 - aeh x - afh = 0 \quad \dots\dots (6)$$

$$(2) \times bg : \quad bdg x^2 + beg x + bfg = 0 \quad \dots\dots (7)$$

$$(3) \times (-bd) : \quad - bdg x^2 - bdh x - bdi = 0 \quad \dots\dots (8)$$

$$(3) \times ae : \quad aeg x^2 + aeh x + aei = 0 \quad \dots\dots (9)$$

$ceg -$	(1) $beg$	(4) $aeg$
$afh -$	(2) $aeh$	(5) $adh$
$bdi -$	(3) $bdh$	(6) $bdg$

$cdh +$	(3) $bdh$	(5) $adh$
$bfg +$	(1) $beg$	(6) $bdg$
$aei +$	(2) $aeh$	(4) $aeg$

未知数  $x, x^2$  を消去すると，((4) + (5) + ... + (9)) 次の行列式が得られる。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

(注) (1),(2),(3) に掛けた次の式は、上の行列式の小行列式に相当する。

$$dh - eg = \begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix}, \quad bg - ah = \begin{vmatrix} b & h \\ a & g \end{vmatrix}, \quad ae - bd = \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}$$

「右 各 逐式交乗し、而して生尅（正負）を得る也。然と雖，相乗之數位は繁多にして、見易からず、交式斜乗を以て之に代える。」とある。

(b) 交式

「換三式より，換四式を起す，換四式より，換五式を起す，<sup>お</sup>逐<sup>かく</sup>つて此の如し。換二式換三式は，交式に及ばず也。順逆共に<sup>たがい</sup> 遞に一を添え，次を得る。乃，式数奇なるは，皆順なり，偶なるは，順逆相交わる也。」

換三式

順	順	順
—	二	三

換四式

順	逆	順	逆
—	二	三	四
—	三	四	二
—	四	二	三

換五式

—	二	三	四	五
—	三	四	五	二
—	四	五	二	三
—	五	二	三	四
—	二	四	五	三
—	四	五	三	二
—	五	三	二	四
—	三	二	四	五
—	二	五	三	四
—	五	三	四	二
—	三	四	二	五
—	四	二	五	三

換二式，換三式は，それぞれ二式，三式だから交式の必要がない。

換三式から換四式を起こすには，換三式の数を巡回させて1を加え，最初に1をおく。即ち，1 2 3を巡回させると1 2 3，2 3 1，3 1 2。各々に1を加えると，2 3 4，3 4 2，4 2 3になり，最初に1をおくと1 2 3 4，1 3 4 2，1 4 2 3と換四式を得る。

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & & 2 & 3 & 1 & & 3 & 1 & 2 \\ \left| \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \right| & = & \left| \begin{matrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{matrix} \right| & = & \left| \begin{matrix} c & a & b \\ f & d & e \\ i & g & h \end{matrix} \right| & = & aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & 2 & 3 & 4 & 1 & & 3 & 4 & 1 & 2 & & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \left| \begin{matrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{matrix} \right| & = & \left| \begin{matrix} b & c & d & a \\ f & g & h & e \\ j & k & l & i \\ i & o & p & m \end{matrix} \right| & = & \left| \begin{matrix} c & d & a & b \\ g & h & e & f \\ k & l & i & j \\ o & p & m & n \end{matrix} \right| & = & \left| \begin{matrix} d & a & b & c \\ h & e & f & g \\ l & i & j & k \\ p & m & n & o \end{matrix} \right| \end{matrix}$$

同様に，換四式から換五式を起こす。

(注) 換五式には誤りがあり，訂正された表を載せた。

(c) 斜乗

「交式各々之を布いて、左右より斜乗して生尅を得る也。若し空級に当るは、之を除き、換式数が奇なるは、左斜乗を以て生となす。偶なるは、左斜乗も右斜乗も生尅相交わる也。」

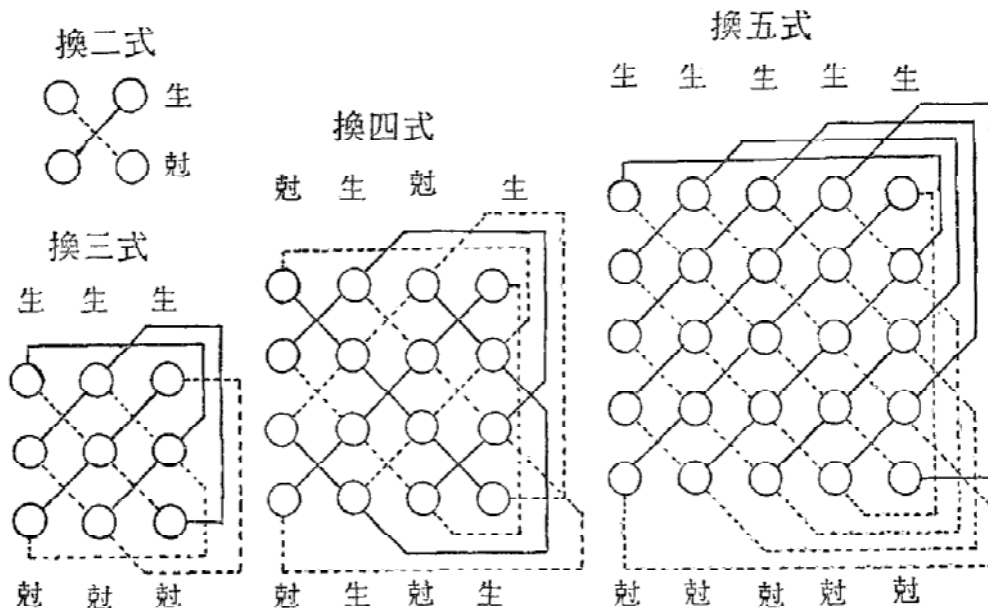


図 1 16)

(注) 換三式は、*sarrus* の法則と同一である。ただし、当時の和文は、現在と異なり右から始まるので生尅（正負）が逆である。

(注) 西洋数学における「行列式」の理論は、*Leibniz* が *L'Hospital* に宛てた書簡（1678）の中で後年に発見された。実際には、*Cramer* が曲線論に関する著書で「行列式」を示し、*Cauchy*(1815) や *Jacobi*(1841) に至って、現在の行列式の理論が出来上がったといわれる。

現在、使用されている行列式の定義は、*Cauchy* による置換を用いた定義である。<sup>19)</sup>

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \sum sgn(i j k) a_i b_j c_k$$

$$\text{ただし、} sgn(i j k) = \begin{cases} 1 & A:\text{偶置換} \\ -1 & A:\text{奇置換} \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

## 1.2 「円理」という術

### (1) 「村松重清」の円周率

和算では、円や球に関する理論を「円理」と呼び、円周率や円の弧長、円の面積、球の体積や表面積等を求めることが主な内容である。我が国で最初に円周率を根拠をもって計算した和算家は、村松重清だといわれている。寛文三年（1663）に著わした「算俎」の中で、次の

ように記している。「方（正方形の一边）一尺を以て八角（正八角形）に截り，又十六角に截り，三十二角に作り，六十四角に作り，百二十八角作り，二百五十六角に作り，五百十二角作り，千二十四角に作り，二千四十八角に作り，四千九十六角に作り八千九十二角に作り，一万六千三百八十四角に作り，三万二千七百六十八角に截る．如图（丸は，零の合紋也）」

直径一尺の円に内接する正  $n$  角形の一边を  $AB$ ，正  $2n$  角形の一边を  $AC$  とし，正  $n$  角形の外周の長さを  $s_n$  とする．

$$AB = a_n \quad AC = a_{2n}$$

$$CM = c_n \quad CC' = 1$$

$$AM^2 = CM \cdot MC' \quad \text{だから}$$

$$\left(\frac{a_n}{2}\right)^2 = c_n(1 - c_n)$$

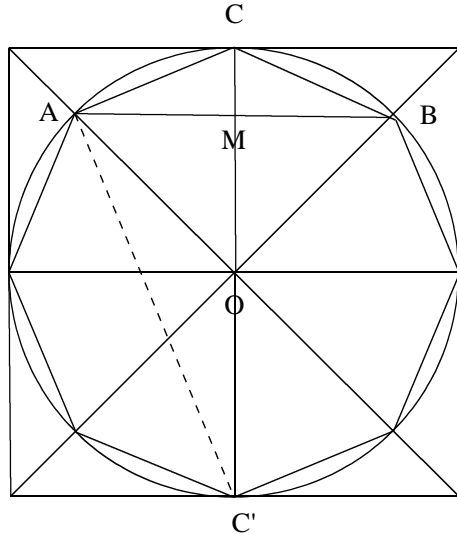
$$a_n^2 = 4c_n(1 - c_n) \quad \dots\dots(1)$$

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 \quad \text{だから}$$

$$a_{2n}^2 = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + c_n^2 \quad \dots\dots(2)$$

$$(1), (2) \text{ より} \quad a_{2n}^2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - a_n^2})$$

$$a_{2n} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - a_n^2})} \quad \text{ただし,} \quad a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad s_n = n a_n \quad \text{図 2}$$



計算ソフト *Mathcad 2000* を用いて計算すると，次のようになる．<sup>1\*)</sup>

$a_4 = 0.707106781186547$	$s_4 = 2.82842712474619$
$a_8 = 0.38268343236509$	$s_8 = 3.06146745892072$
$a_{16} = 0.195090322016128$	$s_{16} = 3.12144515225805$
$a_{32} = 0.098017140329561$	$s_{32} = 3.13654849054594$
$a_{64} = 0.049067674327418$	$s_{64} = 3.14033115695474$
$a_{128} = 0.024541228522912$	$s_{128} = 3.14127725093276$
$a_{256} = 0.012271538285719$	$s_{256} = 3.14151380114415$

$a_{512} = 6.13588464915602 \times 10^{-3}$	$s_{512} = 3.14157294036788$
$a_{1024} = 3.06795676296871 \times 10^{-3}$	$s_{1024} = 3.14158772527996$
$a_{2048} = 1.53398018628156 \times 10^{-3}$	$s_{2048} = 3.14159142150464$
$a_{4096} = 7.66990318752704 \times 10^{-4}$	$s_{4096} = 3.14159234561108$
$a_{8192} = 3.83495187566529 \times 10^{-4}$	$s_{8192} = 3.141592576545$
$a_{16384} = 1.91747597257278 \times 10^{-4}$	$s_{16384} = 3.14159263346325$
$a_{32768} = 9.58737992800168 \times 10^{-5}$	$s_{32768} = 3.14159265480759$
$a_{65536} = 4.794 \times 10^{-5}$	$s_{65536} = 3.14159264532122$
$a_{131072} = 2.397 \times 10^{-5}$	$s_{131072} = 3.14159260737572$

村松重清は， $s_{32768} = 3.14159\ 26487\ 77698\ 86924\ 8$  まで計算した．

(2) 「関孝和」の円周率

関孝和は，「括要算法」巻四第二「求定周」で，次のように円周率のより詳しい求め方を記している．即ち， $s_{32768}$ ， $s_{65536}$ ， $s_{131072}$  から  $p$  の近似値を求めている．

「3 2 7 6 8 角の周 (a) と 6 5 5 3 6 角の周 (b) との差を列し，6 5 5 3 6 角の周 (b) と 1 3 1 0 7 2 角の周 (c) との差を以て之を相乗して，得る数を実となす．3 2 7 6 8 角の周 (a) と 6 5 5 3 6 角の周 (b) との差を列し，内 6 5 5 3 6 角の周 (b) と 1 3 1 0 7 2 角 (c) との差を減じ，余りを法となす．実法の如く而も一にして，得る数 6 5 5 3 6 角の周 (b) に加入し，3 尺 1 寸 4 分 1 厘 5 毛 9 糸 2 忽 6 微 5 纖 3 沙 5 塵 9 埃微弱を得，定周となす．」これを数式で表わすと，

$$b + \frac{(b - a)(c - b)}{(b - a) - (c - b)} = 3.14159\ 26535\ 9 \quad (\text{微弱})$$

(注) 微弱とは，「九以上収めて一とし，之を微弱と謂ふ」と記している．

計算ソフト *Mathcad 2000*<sup>1\*)</sup> で計算すると，次のようになる．

$a_{32768} = 9.58737992800168 \times 10^{-5}$	$a = s_{32768} = 3.14159265480759$
$a_{65536} = 4.794 \times 10^{-5}$	$b = s_{65536} = 3.14159264532122$
$a_{131072} = 2.397 \times 10^{-5}$	$c = s_{131072} = 3.14159260737572$

$$b + \frac{(b - a)(c - b)}{(b - a) - (c - b)} = 3.14159\ 26579\ 6971$$

(注) 松永良弼<sup>よしすけ</sup>は，「起源解」でこの近似式は  $a$ ， $b$ ， $c$  が等比級数をなす (差が等比数列) と仮定したものと記している．

$s_1 = a, s_2 = b, s_3 = c$  とすると

$\frac{s_3 - s_2}{s_2 - s_1}, \frac{s_4 - s_3}{s_3 - s_2}, \frac{s_5 - s_4}{s_4 - s_3}, \dots$  は収束するとみて  $\frac{s_3 - s_2}{s_2 - s_1} = \frac{s_4 - s_3}{s_3 - s_2} = \frac{s_5 - s_4}{s_4 - s_3} = \dots = k$  と置く

$$s_3 - s_2 = k(s_2 - s_1)$$

$$s_4 - s_3 = k^2(s_2 - s_1)$$

$$s_5 - s_4 = k^3(s_2 - s_1)$$

.....

$$s_n - s_{n-1} = k^{n-2}(s_2 - s_1)$$

$$+)$$


---


$$s_n - s_2 = (k + k^2 + k^3 + \dots + k^{n-2})(s_2 - s_1)$$

$$s_n - s_2 = \frac{k(1 - k^{n-2})}{1 - k}(s_2 - s_1)$$

$$k^{n-2} \quad 0 \quad s_n = s_2 + (s_2 - s_1) \frac{k}{1 - k} \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{s_3 - s_2}{s_2 - s_1} = k \dots\dots\dots(2)$$

(1), (2) より 
$$s_n = b + \frac{(b - a)(c - b)}{(b - a) - (c - b)}$$

(注) この近似法を, 関孝和は「増約術」と呼んでいる.

(注) 「括要算法」巻四第三「求周径率」で, この円周率を零約術を用いて分数で表示している.

$$\frac{3}{1}, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \frac{25}{8}, \frac{29}{9}, \frac{32}{10},$$

$$\frac{35}{11}, \frac{38}{12}, \frac{41}{13}, \frac{44}{14}, \frac{47}{15}, \frac{51}{16}, \frac{54}{17}, \frac{57}{18}, \frac{60}{19}, \frac{63}{20},$$

$$\frac{66}{21}, \frac{69}{22}, \frac{73}{23}, \frac{76}{24}, \frac{79}{25}, \frac{82}{26}, \frac{85}{27}, \frac{88}{28}, \frac{91}{29}, \frac{95}{30},$$

.....

$$\frac{330}{105}, \frac{333}{106}, \frac{337}{107}, \frac{340}{108}, \frac{343}{109}, \frac{346}{110}, \frac{349}{111}, \frac{352}{112}, \frac{355}{113}$$

(注) そちゅうし 祖沖之の円周率  $\frac{22}{7}, \frac{355}{113}$  りゅうび 劉徽の円周率  $\frac{157}{50}$  しげよし 毛利重能の円周率  $\frac{79}{25}$

(3) 「建部賢弘」の円周率

建部賢弘は、「綴術算経」探円数第十一で、次のようにさらに詳しく円周率を計算している。

正  $2^n$  角形の周長を  $s_n$  とし、 $s_n^2 = s_n$  とおく

$$\frac{s_3 - s_2}{s_2 - s_1}, \frac{s_4 - s_3}{s_3 - s_2}, \frac{s_5 - s_4}{s_4 - s_3}, \dots \text{ は } \frac{1}{4} \text{ に収束するとみて}$$

$$s_3^{(1)} = s_3 + \frac{1}{4-1}(s_3 - s_2)$$

$$s_4^{(1)} = s_4 + \frac{1}{4-1}(s_4 - s_3) \quad \text{とおく}$$

.....

$$s_{17}^{(1)} = s_{17} + \frac{1}{4-1}(s_{17} - s_{16})$$

$s_3^{(1)}, s_4^{(1)}, \dots, s_{17}^{(1)}$  : 第1次近似列

同様に、 $\frac{s_3^{(1)} - s_2^{(1)}}{s_2^{(1)} - s_1^{(1)}}, \frac{s_4^{(1)} - s_3^{(1)}}{s_3^{(1)} - s_2^{(1)}}, \frac{s_5^{(1)} - s_4^{(1)}}{s_4^{(1)} - s_3^{(1)}}, \dots$  は  $(\frac{1}{4})^2$  に収束するとみて

$$s_4^{(2)} = s_4^{(1)} + \frac{1}{4^2-1}(s_4^{(1)} - s_3^{(1)})$$

$$s_5^{(2)} = s_5^{(1)} + \frac{1}{4^2-1}(s_5^{(1)} - s_4^{(1)})$$

とおく

.....

$$s_{17}^{(2)} = s_{17}^{(1)} + \frac{1}{4^2-1}(s_{17}^{(1)} - s_{16}^{(1)})$$

$s_4^{(2)}, s_5^{(2)}, \dots, s_{17}^{(2)}$  : 第2次近似列

以下、同様に、第7次近似列までを使用して次項を計算している。

$$s_{10}^{(8)} = s_{10}^{(7)} + \frac{1}{4^8-1}(s_{10}^{(7)} - s_9^{(7)})$$

$$\sqrt{s_{10}^{(8)}} = 3.14159 \ 26535 \ 89793 \ 23846 \ 26433 \ 83279 \ 50288 \ 41971 \ \text{強}$$

(注) 正しい円周率を小数点下50桁まで記しておく。

3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 ...

現在では、次の Stomer の公式などの級数を利用して円周率を求めている。

$$\begin{aligned} \frac{p}{4} &= 6 \tan^{-1} \left( \frac{1}{8} \right) + 2 \tan^{-1} \left( \frac{1}{57} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{1}{239} \right) \\ &= 6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left( \frac{1}{8} \right)^{2k-1}}{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left( \frac{1}{57} \right)^{2k-1}}{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left( \frac{1}{239} \right)^{2k-1}}{2k-1} \end{aligned}$$



(4) 「<sup>としきよ</sup>鎌田俊清」の円周率

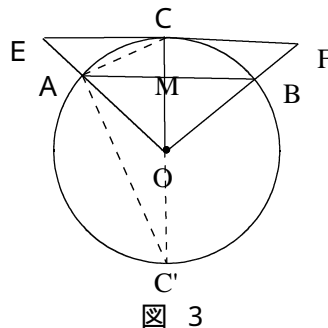
大阪の宅間流第三代，鎌田俊清は「宅間流円理」を享保七年（1722）に著わした．そのなかで，円周率を，円に内外接する正多角形の周の長さを計算することによって求めている．

AB = a を円の内接正 n 角形の一辺，

EF = b を円の外接正 n 角形の一辺とし，

CM = c とすると，b = 1 のとき

$$b^2 = \frac{a^2}{1 - a^2} \dots\dots\dots(1)$$



円に内接する正 44 多角形の周長  $a_{44}$  を求めて、

$$a_{44} = 3.1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846\ 2643\ 3665\ 8$$

外接正 44 多角形の周長  $b_{44}$  を上式から求めると、

$$b_{44} = 3.1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846\ 2653\ 4166\ 7$$

$$3.1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846\ 2653\ 4166\ 7 < p < 3.1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846\ 2643\ 3665\ 8$$

(注) 当時の和算家は、この上下から挟み込む考え方を理解する者は他になかった。

(1) の証明

	OAB	OEF	CAC' で $AM^2 = CM \cdot MC'$
	$a : b = \frac{1}{2} - c : \frac{1}{2}$		$(\frac{a}{2})^2 = c(1 - c)$
	$a = b(1 - 2c)$		$a^2 = 4c(1 - c)$
	$a^2 = b^2(1 - 2c)^2 \dots\dots\dots(2)$		$1 - a^2 = (1 - 2c)^2 \dots\dots\dots(3)$
	(2), (3) より $b^2 = \frac{a^2}{1 - a^2}$		

(5) 今村知商<sup>ともあき</sup>の「円弦之術」

寛永16年(1639)に著わした「<sup>じゆがいろく</sup>豎亥録」で、次のように記している。

「知弧矢弦之弧式者、用知径矢弦之径式、知円径、而円径之尺数、于是知矢之尺数、半之而得尺数、俱是得尺数、于是用矢之尺数四因之而得尺数、因乘而得歩数為実、用開平之式、則得尺数、是弧也。」(円径の尺数に、矢の尺数の二分の一を加え、是に矢の尺数の四倍を乗じた歩数を実として、開平式を用いて(則ち)得たる尺数が、是れ弧也。)

これを数式で記すと、次のようになる。

弦 AB = a, 矢 CM = c, 円の直径 CC' = d, 弧長  $\widehat{ACB} = s$  とすると、

$$s^2 = 4c(d + \frac{c}{2})$$

(注) これは、弓形が半円のときに適合する近似式で、算出の根拠は示されていない。

$$s = \frac{pd}{2}, c = \frac{d}{2} \text{ とすると } p = \sqrt{10}$$

(6) 建部賢弘の「円理弧背術」

享保7年(1722)建部賢弘は、「綴術算経」を著わし、探弧数第十二のなかで円弧の長さを無限級数に展開した。

「<sup>はじめ</sup>始に、径(直径)一尺にして矢一寸、矢二寸、矢三寸、矢四寸等の定背を碎約し求め続けて又矢四寸五分、矢四寸九分等の定背を求めて、その数を探るに、半円に近き者に於て據と為することを不会、故に往歳関氏孤率を造改むること再次、吾亦重て造改むこと一次、共に皆不精して其の術廢しぬ。其の矢一寸の半背巾一十寸〇三強と、矢一分の半背巾一寸〇〇三三強の<sup>あきらかな</sup>数に依って、予め矢の極微なる者必ず真数の顯るべきことを察して、矢一忽半背巾の定数を求め得て其の質を探会せり」

弦  $AB = a_1, AC = a_2,$

矢  $CM = c = 10^{-5}$  (寸), 直径  $CC' = d = 10$  (寸)

弧長  $\widehat{ACB} = s$  とする

$a_{2n}^2 = 5(10 - \sqrt{100 - a_n^2})$

ただし,  $a_1^2 = 4 \times 10^{-5}(10 - 10^{-5})$

$s_n^2 = n^2 a_n^2$

$(\frac{s}{2})^2 = \frac{1}{10^4} \times 1.00000033333351111122539690666672$   
 82347769479595875強 (寸)

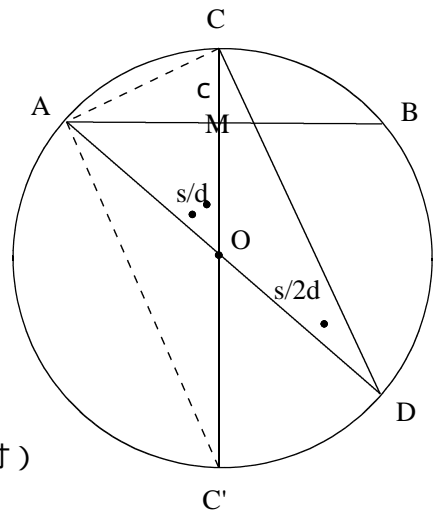


図 4

(注) これを基本数値とし「定半背巾」と名付けている。

$(\frac{s}{2})^2 = \frac{1}{10^4} \times 1.0000003333335111112253969066667282347769479595875$

$(\frac{s}{2})^2$  は、ほぼ  $\frac{1}{10^4} = \frac{1}{10^5} \times 10$  とみて、

$cd = a_1$  とおく  $a_1 = cd$  .....(1)

$(\frac{s}{2})^2 - a_1 = \frac{1}{10^{10}} \times 0.3333335111112253969066667282347769479595875$  (一定差)

$(\frac{s}{2})^2 - a_1$  は、ほぼ  $\frac{1}{10^{10}} \times \frac{1}{3}$  とみて、

$\frac{1}{10^{10}} \times \frac{1}{3} = a_2$  とおく  $a_2 = \frac{1}{3} \frac{c}{d} a_1 = \frac{1}{3} (\frac{d}{c})^2 cd$  .....(2)

$(\frac{s}{2})^2 - (a_1 + a_2) = \frac{1}{10^{16}} \times 0.1777778920635733333949014436146262542$  (二定差)

$(\frac{s}{2})^2 - (a_1 + a_2)$  は、 ほぼ  $\frac{1}{10^{16}} \times \frac{1}{3} \frac{8}{15}$  とみて、

$$\frac{1}{10^{16}} \times \frac{1}{3} \frac{8}{15} = a_3 \text{ とおく } a_3 = \frac{8}{15} \frac{d}{c} a_2 = \frac{1}{3} \frac{8}{15} (\frac{d}{c})^2 cd \dots\dots\dots(3)$$

$$(\frac{s}{2})^2 - (a_1 + a_2 + a_3) \quad \frac{1}{10^{22}} \times 0.1142857955556171236658368484764 \quad (\text{三定差})$$

$(\frac{s}{2})^2 - (a_1 + a_2 + a_3)$  は、 ほぼ  $\frac{1}{10^{22}} \times \frac{1}{3} \frac{8}{15} \frac{9}{14}$  とみて、

$$\frac{1}{10^{22}} \times \frac{1}{3} \frac{1}{15} \frac{9}{14} = a_4 \text{ とおく } a_4 = \frac{9}{14} \frac{d}{c} a_3 = \frac{1}{3} \frac{8}{15} \frac{9}{14} (\frac{d}{c})^3 cd \dots\dots\dots(4)$$

$$(\frac{s}{2})^2 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \quad \frac{1}{10^{29}} \times 0.812699028379515511341907 \quad (\text{四定差})$$

$(\frac{s}{2})^2 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$  は、 ほぼ  $a_5 = \frac{1}{10^{29}} \times \frac{1}{3} \frac{8}{15} \frac{9}{14} \frac{32}{45} \frac{c}{d}$  とみて、

$$\frac{1}{10^{29}} \times \frac{1}{3} \frac{8}{15} \frac{9}{14} \frac{32}{45} \frac{c}{d} = a_5 \text{ とおく } a_5 = \frac{32}{45} \frac{d}{c} a_4 = \frac{1}{3} \frac{8}{15} \frac{9}{14} \frac{32}{45} (\frac{d}{c})^4 cd \dots\dots (5)$$

$$(\frac{s}{2})^2 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \quad \frac{1}{10^{35}} \times 0.615681102812929209 \quad (\text{五定差})$$

$(\frac{s}{2})^2 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$  は、 ほぼ  $\frac{1}{10^{29}} \times \frac{1}{3} \frac{8}{15} \frac{9}{14} \frac{32}{45} \frac{25}{33}$  とみて、

$$\frac{1}{10^{29}} \times \frac{1}{3} \frac{8}{15} \frac{1}{14} \frac{32}{45} \frac{25}{33} = a_6 \text{ とおく } a_6 = \frac{25}{33} \frac{d}{c} a_5 = \frac{1}{3} \frac{8}{15} \frac{9}{14} \frac{32}{45} \frac{25}{33} (\frac{d}{c})^5 cd \dots (6)$$

(1),(2),(3), (4),(5),(6),(7),(8) より

$$(\frac{s}{2})^2 = cd \{ 1 + \frac{1}{3} (\frac{c}{d}) + \frac{1}{3} \frac{8}{15} (\frac{c}{d})^2 + \frac{1}{3} \frac{8}{15} \frac{9}{14} (\frac{c}{d})^3 + \frac{1}{3} \frac{8}{15} \frac{9}{14} \frac{32}{45} (\frac{c}{d})^4 + \\ + \frac{1}{3} \frac{8}{15} \frac{9}{14} \frac{32}{45} \frac{25}{33} (\frac{c}{d})^5 + \frac{1}{3} \frac{8}{15} \frac{9}{14} \frac{32}{45} \frac{25}{33} \frac{72}{91} (\frac{c}{d})^6 + \dots \}$$

(注) 「零約術」により、次のように小数值を分数に直した。

$$(\frac{s}{2})^2 - a_1 \quad \frac{1}{10^{10}} \times 0.3333335111112253969066667282347769479595875 \quad (\text{一定差}) \\ 0.3333335111112253969066667282347769479595875 \quad \frac{1}{3} \quad (\text{零約術による})$$

$$(\frac{s}{2})^2 - (a_1 + a_2) \quad \frac{1}{10^{16}} \times 0.17777778920635733333949014436146262542 \quad (\text{二定差}) \\ (\text{二定差}) \div (\text{一定差}) \quad 0.5333 \ 3367 \ 6191 \quad \frac{8}{15} \quad (\text{零約術による})$$

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 - (a_1 + a_2 + a_3) = \frac{1}{10^{22}} \times 0.1142857955556171236658368484764 \quad (\text{三定差})$$

$$(\text{三定差}) \div (\text{二定差}) = 0.6428576000003463206203322726798884627$$

$$\frac{9}{14} \quad (\text{零約術による})$$

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = \frac{1}{10^{29}} \times 0.812699028379515511341907 \quad (\text{四定差})$$

$$(\text{四定差}) \div (\text{三定差}) = 0.711111649832$$

$$\frac{32}{45} \quad (\text{零約術による})$$

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = \frac{1}{10^{35}} \times 0.615681102812929209 \quad (\text{五定差})$$

$$(\text{五定差}) \div (\text{四定差}) = 0.757576356977$$

$$\frac{25}{33} \quad (\text{零約術による})$$

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_6) = \frac{1}{10^{41}} \times 0.487132313528 \quad (\text{六定差})$$

$$(\text{六定差}) \div (\text{五定差}) = 0.791209437363177936$$

$$\frac{72}{91} \quad (\text{零約術による})$$

「零約術」で求めた係数  $\frac{1}{3}, \frac{8}{15}, \frac{9}{14}, \frac{32}{45}, \frac{25}{33}, \frac{72}{91}$  から規則性を見つけて、次のように書き直す。

$$\frac{2^2}{3 \cdot 4}, \frac{4^2}{5 \cdot 6}, \frac{6^2}{7 \cdot 8}, \frac{8^2}{9 \cdot 10}, \frac{10^2}{11 \cdot 12}, \frac{12^2}{13 \cdot 14}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{s}{2}\right)^2 = cd \left\{ 1 + \frac{2^2}{3 \cdot 4} \left(\frac{c}{d}\right) + \frac{4^2}{5 \cdot 6} \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{6^2}{7 \cdot 8} \left(\frac{c}{d}\right)^3 + \frac{8^2}{9 \cdot 10} \left(\frac{c}{d}\right)^4 \right. \\ \left. + \frac{10^2}{11 \cdot 12} \left(\frac{c}{d}\right)^5 + \frac{12^2}{13 \cdot 14} \left(\frac{c}{d}\right)^6 + \dots \right\} \end{aligned}$$

(注) 図4で  $AC = \sqrt{cd}$ ,  $d \sin \frac{s}{2d} = AC$  だから  $\left(\frac{s}{2}\right)^2 = d^2 \left( \arcsin \sqrt{\frac{c}{d}} \right)^2$  20)

この級数は、オイラーが発見した次の展開公式と同一である。

$$(\arcsin \sqrt{t})^2 = t + \frac{2^2}{3 \cdot 4} t^2 + \frac{2^2 \cdot 4^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} t^3 + \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} t^4 + \dots$$

(7) 関孝和の求積

和算における円や球の求積を，孝和の著書「求積」および「括要算法」から調べてみたい。

1) 円の面積

「求積」には，次のように記されている。「仮如に，(直)径七尺の円有り，(面)積を問う... 解に曰く，是角の極まる所，而して中心より圭(二等辺三角形)を累かさねて此の形を成す。故に，周を圭の濶(はば)に擬して，半径を圭の長さに擬して之を求む。」

これを現代風に記すと，半径  $r$  の円に内接する正  $n$  角形の各辺と円の中心を結ぶ  $n$  個の二等辺三角形の面積の総和は，右の三角形の面積に限りなく近づから，これを求める円の面積とする。

$$\text{円の面積} = \frac{1}{2} \times 2pr \times r = p r^2$$

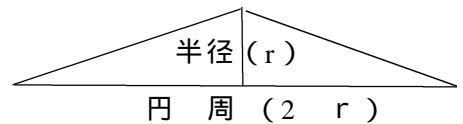


図 5

2) 側円(楕円)の面積

楕円の求積を，最初に取り上げたのは関孝和だといわれている。<sup>16), 17)</sup> 彼の書「求積」で，次のように記している。

「仮如に，側円有り，長径三尺，短径一尺三寸，(面)積を問う。答えて曰く，積三百〇六寸二百二十六分寸之六十九。解に曰く，是全円これ敬側して(傾斜して)而して成る所也。円(円柱)上より下に至り斜きに之を截すなわちれば，則ち其の面すなわち即此の形也。」

これを，現代風に記すと次のようになる。

右図で，

楕円の長軸の長さを  $2a$ ，短軸の長さを  $2b$  とする。

AHC ABC だから，

$$AH : h = 2a : 2b$$

$$AH = \frac{ah}{b} \dots\dots\dots(1)$$

求める楕円の面積を  $S$  とすると，

$$p a^2 h = S \cdot AH \dots\dots\dots(2)$$

$$(1), (2) \text{ より } S = p ab$$

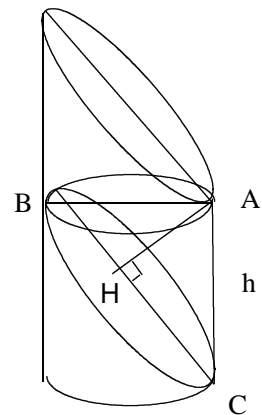


図 6

3) 球の体積

「括要算法」求立円積術は，次のように記している。

$$(\text{球の体積}) = (\text{直径})^3 \times (\text{玉法}) \quad \text{ただし, } (\text{玉法}) = \frac{1}{6} \times \frac{355}{113} = \frac{355}{678}$$

「径一尺の立円（球）を厚さ <sup>おのおの</sup> 各二分にして、五十片に <sup>き</sup> 載る。径矢弦の術を以て、<sup>おのおの</sup> 各の弦巾を得る。上下の弦巾を相併せ、厚さを以て之に乘じ、得たる数之を折半（二等分）し、各の載積を得る。」

（注）弦巾...円台の直径の平方、載積...（上下の弦巾の相加平均）×（厚さ）

$d = 10$ （寸）の球を  $n$  等分する.

(i)  $n = 50$  のとき 載積の総和を  $a$  とすると、 $a = 666.4$

(ii)  $n = 100$  のとき 載積の総和を  $b$  とすると、 $b = 666.6$

(iii)  $n = 200$  のとき 載積の総和を  $c$  とすると、 $c = 666.65$

増約術により、

$$b + \frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)} = 666 \frac{2}{3}$$

$$666 \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \frac{355}{113} = \frac{1}{6} \frac{355}{113} (10)^3$$

$$= \frac{p}{6} d^3$$

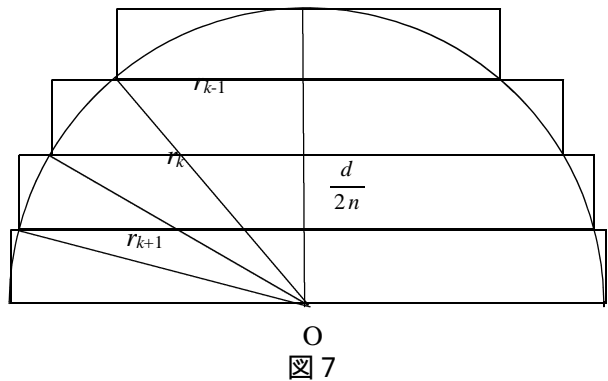


図 7

（注）弦巾  $r_k^2 = d^2 \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{k}{m} \right)^2 \right\}$ , 載積  $\sum_{k=0}^{m-1} \frac{r(k) + r(k+1)}{2} \frac{d}{m}$  ただし、 $m = \frac{n}{2}$

計算ソフト *MathCad 2000 Professional* <sup>\*1)</sup> により、検証する.

弦巾  $r^2(k) = 10^2 \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{k}{25} \right)^2 \right\}$   $r^2(k) = 10^2 \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{k}{50} \right)^2 \right\}$   $r^2(k) = 10^2 \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{k}{100} \right)^2 \right\}$   
 $k = 1..25$   $r(k) =$   $k = 1..50$   $r(k) =$   $k = 1..100$   $r(k) =$

$$\text{載積 } a = \sum_{k=0}^{49} \frac{r(k) + r(k+1)}{2} 5^{-1} = 666.4$$

$$b = \sum_{k=0}^{99} \frac{r(k) + r(k+1)}{2} 10^{-1} = 666.6$$

$$c = \sum_{k=0}^{199} \frac{r(k) + r(k+1)}{2} 20^{-1} = 666.65$$

$$b + \frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)} = 666.667$$

連分数の理論により,  $666.667 = 666\frac{2}{3}$

## 引用文献

- 1) 分数ができない大学生 1999 岡部恒治、戸瀬信之、西村和雄編 東洋経済新報社
- 2) 「数」の日本史 2002 伊達 宗行 著 日本経済新聞社
- 3) 和算以前 1980 大矢 真一 著 中央公論社
- 4) 中国の数学 1974 藪内 清 著 岩波書店
- 5) 塵劫記 全三巻 1977 塵劫記刊行三百五十年記念顕彰事業実行委員会  
委員長 大矢 真一 編 大阪教育図書
- 6) 日本の数学 1940 小倉 金之助 著 岩波書店
- 7) 中国数学史 1990 銭 宝琮 著 川原 秀城 訳 みすず書房
- 8) 中国の数学通史 2002 李 迪 著 大竹 茂雄・陸 人瑞 訳 森北出版
- 9) 日本の数学西洋の数学 1956 村田 全 著 中央公論社
- 10) 韓国数学史 1978 金 容雲 金 容局 著 槇 書店
- 11) 数学史2 1971 エー・コールマン アー・パー・シュケービッチ著  
山内 一次・井関 清志 訳 東京図書
- 12) 東西数学物語 1955 平山 諦 著 恒星社恒星閣
- 13) ユークリッド原論 1971 ユークリッド著  
中村幸四郎・寺坂英孝・伊藤俊太郎・池田恵美訳 共立出版
- 14) ピタゴラスの定理 1975 大矢真一 著 東海大学出版会
- 15) カジョリ 初等数学史 1997 カジョリ著 小倉金之助訳 共立出版
- 16) 関 孝和 1959 平山 諦 著 恒星社恒星閣
- 17) 関孝和全集 全 1974 平山 諦 下平 和夫 広瀬 實 編 大阪教育図書
- 18) 明治前 日本数学史 1954 日本学士院編 岩波書店
- 19) 代数学講義 1930 高木 貞治 著 岩波書店
- 20) 数学の歴史 和算と西欧数学の発展 小川 束 平野 葉一 著 朝倉書店
- 21) *Morimoto M., Japanese Mathematics in the 18th century, Proceedings of International Conference in Mathematics, 2003*

## 使用計算ソフト

- 1\*) *Mathcad 2000 Professional (MathSoft, Inc.)*