

じんごうき
塵劫記の「百五減という算」について（平成15年）

塵劫記は、江戸期の初め吉田光由によって著わされた本邦最初の庶民のための算術書である。初版は、寛永四年（1627）に出版されている。塵劫とは、仏教用語の塵点劫を意味し、「永劫」の意である。

第43 百五減という算

基石、あるいは八十六ある時に、この八十六の数を知らずして、この数なにほどという時に、まづ、七づつ引く時に残る半、二つあるといふ。また、五づつ引く時には、残る半に、一あるといふ。また、三づつを引く時には、残る半、二つあるといふ。この半ばかりを聞いて、この数をいふなり。

八十六ありといふなり。

法に、七づつの時、半一つを十五の算用に入れ、三十と置き、また、五づつの半を一つ二十一と入れて置き、また、三づつ時の半を、一つを七十づつの算用にして、百四十と入れて、三口合百九十一ある時、百に余る時には、百五をはらひ、残り八十六といふなり。

$$15 \times 2 + 21 \times 1 + 70 \times 2 - 105 = 86$$

（解説）

3つの数 $7a + 2$, $5b + 1$, $3c + 2$ から 7, 5, 3 で割ると余りがそれぞれ 2, 1, 2 となる数をつくる。

$$P = p(5 \times 3 \times 2) + q(7 \times 3 \times 1) + r(7 \times 5 \times 2)$$

$$= 30p + 21q + 70r \quad \text{とおく}$$

$$P \equiv 2 \pmod{7} \quad \therefore 30p \equiv 2 \pmod{7}$$

$$p \equiv 1 \pmod{7} \quad p = 1$$

$$P \equiv 1 \pmod{5} \quad \therefore 21q \equiv 1 \pmod{5}$$

$$q \equiv 1 \pmod{5} \quad q = 1$$

$$P \equiv 2 \pmod{3} \quad \therefore 70r \equiv 2 \pmod{3}$$

$$r \equiv 2 \pmod{3} \quad r = 3$$

$$\therefore P = 15 \times 2 + 21 \times 1 + 70 \times 2$$

P は、3, 5, 7で割ると、余りがそれぞれ 2, 1, 2となる。

$$\therefore 15 \equiv 1 \pmod{7}, \quad 21 \equiv 1 \pmod{5}, \quad 70 \equiv 1 \pmod{3}$$

しかもで、105より大きいときは105を引くから「百五減の算」と呼んでいる。

$$\therefore P - 105 = 15 \times 2 + 21 \times 1 + 70 \times 2 - 105 = 86$$

$$x - 2 = 7l, \quad x - 1 = 5m, \quad x - 2 = 3n \quad (l, m, n : \text{整数})$$

(解1) $x-2 = 21p, x-1 = 5m$ (p : 整数)

$$x > 0 \text{ より } p > -\frac{2}{21} \text{ で、 } 5m-21p = 1$$

$$p = 4 \text{ のとき } m = \frac{85}{5} = 17 \text{ で適す}$$

$$\therefore x = 1 + 5 \times 17 = 86 \text{ ……Ans.}$$

(解2) 中国の剰余の定理 (*Chinese remainder theorem*) (*C.R.T.*) は、5世紀中頃の書籍「孫子算経」そんしきんけい 下巻26題に次のように記されている。

「いま物あり、その数はわからない。これを3個ずつ数えると2個余り、5個ずつ数えると3個余り、7個ずつ数えると2個余る。物の数はいくらあるか。答23。」

このことから、次の解法は、中国の剰余の定理と呼ばれ、ガウスが1801年出版の「整数論」で証明している。

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

3, 5, 7は、2つずつ互いに素だから、

$$15u + 21v + 35w = 1 \quad (u, v, w : \text{整数})$$

特殊解 $u = v = 1, w = -1$

$$x = 2 \times (5 \times 3) \times 1 + 1 \times (7 \times 3) \times 1 + 2 \times (7 \times 5) \times (-1)$$

$$\equiv -19 \pmod{105}$$

$$x = 105k - 19 \quad (\text{一般解})$$

$$k = 1 \text{ のとき } x = 86 \text{ ……Ans.}$$

(注) 有限生成のアーベル群の構造の一例

引用文献

塵劫記 全三巻 1977 塵劫記刊行三百五十年記念顕彰事業実行委員会

大矢 真一 編

大阪教育図書