

じんごうき
塵劫記の「百五減という算」について（平成15年）

塵劫記は江戸期の初め吉田光由によって著わされた。本邦で最初の庶民のための算術書である。初版は寛永四年（1627）に出版されている。塵劫とは仏教用語の塵点劫を意味し、「永劫」の意である。

第43 百五減という算

碁石、あるいは八十六ある時に、この八十六の数を知らずして、この数なにほどという時に、まづ、七つつ引く時に残る半、二つあるといふ。また、五つつ引く時には、残る半に、一あるといふ。また、三つつを引く時には、残る半、二つあるといふ。この半ばかりを聞いて、この数をいふなり。八十六ありといふなり。

法に、七つつの時、半一つを十五の算用に入れ、三十と置き、また、五つつの半を一つ二十一と入れて置き、また、三つつの時の半を、一つを七十つつの算用にして、百四十と入れて、三口合百九十一ある時、百に余る時には、百五をはらひ、残り八十六といふなり。

$$15 \times 2 + 21 \times 1 + 70 \times 2 - 105 = 86$$

（解説）

3つの数 $7a + 2$, $5b + 1$, $3c + 2$ を 7, 5, 3 で割ると余りがそれぞれ 2, 1, 2 となる数をつくる。

$$\begin{aligned} P &= p(5 \times 3 \times 2) + q(7 \times 3 \times 1) + r(7 \times 5 \times 2) \\ &= 30p + 21q + 70r \quad \text{とおく} \end{aligned}$$

$$P \equiv 2 \pmod{7} \quad \therefore 30p \equiv 2 \pmod{7}$$

$$p \equiv 1 \pmod{7} \quad p = 1$$

$$P \equiv 1 \pmod{5} \quad \therefore 21q \equiv 1 \pmod{5}$$

$$q \equiv 1 \pmod{5} \quad q = 1$$

$$P \equiv 2 \pmod{3} \quad \therefore 70r \equiv 2 \pmod{3}$$

$$r \equiv 2 \pmod{3} \quad r = 3$$

$$\therefore P = 15 \times 2 + 21 \times 1 + 70 \times 2$$

P は 3, 5, 7で割ると、余りがそれぞれ 2, 1, 2となる。

$$\therefore 15 \equiv 1 \pmod{7}, \quad 21 \equiv 1 \pmod{5}, \quad 70 \equiv 1 \pmod{3}$$

しかも、105より大きいときは105を引くから「百五減の算」と呼んでいる。

$$\therefore P - 105 = 15 \times 2 + 21 \times 1 + 70 \times 2 - 105 = 86$$

(解1) $x - 2 = 7l, x - 1 = 5m, x - 2 = 3n$ (l, m, n : 整数)

$$x - 2 = 21p, x - 1 = 5m \quad (p: \text{整数})$$

$$x > 0 \text{ より } p > -\frac{2}{21} \text{ で, } 5m - 21p = 1$$

$$p = 4 \text{ のとき } m = \frac{85}{5} = 17 \text{ で適す}$$

$$\therefore x = 1 + 5 \times 17 = 86 \text{ ……Ans.}$$

(解2) 中国の剰余の定理 (*Chinese remainder theorem*) (*C.R.T.*) は, 5世紀中頃の書籍「孫子算経」^{そんしさんけい} 下巻26題に次のように記されている.

「いま物あり, その数はわからない. これを3個ずつ数えると2個余り, 5個ずつ数えると3個余り, 7個ずつ数えると2個余る. 物の数はいくらあるか. 答23.」

このことから, 次の解法は中国の剰余の定理と呼ばれ, ガウスが1801年に出版した「整数論」で証明している.

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

3, 5, 7は2つずつ互いに素だから,

$$15u + 21v + 35w = 1 \quad (u, v, w: \text{整数})$$

特殊解 $u = v = 1, w = -1$

$$x = 2 \times (5 \times 3) \times 1 + 1 \times (7 \times 3) \times 1 + 2 \times (7 \times 5) \times (-1)$$

$$\equiv -19 \pmod{105}$$

$$x = 105k - 19 \quad (\text{一般解})$$

$$k = 1 \text{ のとき } x = 86 \text{ ……Ans.}$$

(注) 有限生成のアーベル群の構造の一例.

引用文献

塵劫記 全三巻 1977 塵劫記刊行三百五十年記念顕彰事業実行委員会

大矢 真一 編

大阪教育図書