

図形とホモロジー加群 (平成25年)

これから記すホモロジー加群は、図形の頂点 (0 単体) を結ぶ鎖群の在り方を調べる数学である。

1. 単体と面

n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n で

点 p を 0 単体, 線分 a を 1 単体, 三角形 α を 2 単体という。

また, 線分の両端を線分の面, 三角形の三辺を三角形の面といい, $p \leq a \leq \alpha$ と記す。

1 単体, 2 単体は 0 単体で表される。

$$a = \{x \mid x = \lambda p_0 + \mu p_1, \lambda + \mu = 1, \lambda \geq 0, \mu \geq 0\}$$

$$\alpha = \{x \mid x = \lambda p_0 + \mu p_1 + \nu p_2, \lambda + \mu + \nu = 1, \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \nu \geq 0\}$$

一般に, r 単体 σ_r は 0 単体を用いて次のように表される。

$$\sigma_r = \left\{ x \mid x = \sum_{k=0}^r \lambda_k p_k, \sum_{k=0}^r \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0 \right\}$$

また, $\sigma_r = \{p_0 p_1 \cdots p_r\}$ とも記す。

(注) $\{p_0 p_1 \cdots p_r\}$: 0 単体の組 (集合) を表す記号。

$|p_0 p_1 \cdots p_r|$: 向きを考えない r 単体を表す記号。

$(p_0 p_1 \cdots p_r)$: 0 単体の順列で, 偶置換のとき +1, 奇置換のとき -1 とする。

2. 複体

n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n で, 有限個の 0 単体の集合で, 次の条件を満たす K を複体という。

$$K = \{p_0 p_1 \cdots p_r\}$$

(1) K の単体の面は K に属する。

$$\sigma \in K, \sigma' \leq \sigma \Rightarrow \sigma' \in K$$

(2) K の 2 つの単体の交わりは, それぞれの単体の面である。

$$\sigma, \tau \in K, \sigma \cap \tau \neq \emptyset \Rightarrow \sigma \cap \tau \leq \sigma, \sigma \cap \tau \leq \tau$$

3. 単体写像

K, L を複体とし, K から L への線形写像 Φ が存在するとき, この写像を単体写像という。

$$\Phi : K \rightarrow L$$

$$\Phi(\sigma + \tau) = \Phi(\sigma) + \Phi(\tau)$$

$$\Phi(\lambda \sigma) = \lambda \Phi(\sigma)$$

4. 鎖群と境界

K の有向単体 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ を生成元とする自由アーベル群を K の r 次鎖群といい、 $C_r(K)$ と記す.

$$C_r(K) = \{ (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r) \}$$

鎖群 $C_r(K)$ の境界を $\partial_r(K)$ と記し,

$$\partial_r(K) = \sum_{i=0}^r (-1)^i (p_0 \cdots \hat{p}_i \cdots p_r)$$

ただし, \hat{p}_i は p_i を除くことを意味する. 即ち,

$$(p_0 \cdots \hat{p}_i \cdots p_r) = (p_0 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_r)$$

(注) $\partial_r : C_r \rightarrow C_{r-1}$ (準同型写像) 境界作用子という.

例 $C_0(K) = (p_0)$ $\partial C_0(K) = 0$ とする.

$$C_1(K) = (p_0 p_1) \quad \partial C_1(K) = p_1 - p_0$$

$$\begin{aligned} C_2(K) = (p_0 p_1 p_2) \quad \partial C_2(K) &= (p_1 - p_2) - (p_0 - p_2) + (p_0 - p_1) \\ &= (p_0 p_1) + (p_1 p_2) + (p_2 p_0) \end{aligned}$$

線分 $p_0 p_i$ の境界 $p_0 \cup p_i$

$$\Delta p_0 p_i p_2 \text{ の境界 } |p_0 p_1| \cup |p_1 p_2| \cup |p_2 p_0|$$

補題 $\sigma = |p_0 p_1 \cdots p_{r+1}|$ のとき

$$\partial_r \cdot \partial_{r+1}(\sigma) = 0$$

proof.

$$\begin{aligned} \partial_r(\partial_{r+1}(\sigma)) &= \partial_r\left(\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i (p_0 p_1 \cdots \hat{p}_i \cdots p_{r+1})\right) \\ &= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \partial_r(p_0 p_1 \cdots \hat{p}_i \cdots p_{r+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (p_0 \cdots \hat{p}_j \cdots \hat{p}_i \cdots p_{r+1}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i+1}^{r+1} (-1)^{j-1} (p_0 \cdots \hat{p}_i \cdots \hat{p}_j \cdots p_{r+1}) \right\} \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (p_0 \cdots \hat{p}_j \cdots \hat{p}_i \cdots p_{r+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (p_0 \cdots \hat{p}_i \cdots \hat{p}_j \cdots p_{r+1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

q. e. d.

5. 輪体群と境界輪体群

$C_r(\mathbf{K})$ の元 c について

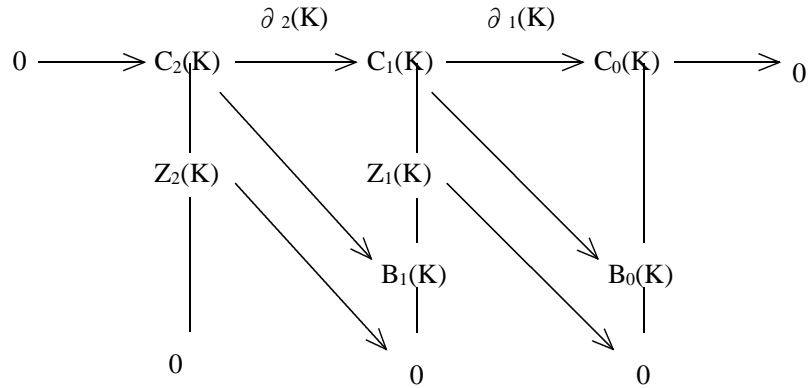
$\partial_r(c) = 0$ となる c の集合を \mathbf{K} の r 次元輪体群といい、 $Z_r(\mathbf{K})$ と記す.

(注) $Z_r(\mathbf{K})$ は $C_r(\mathbf{K})$ の正規部分群である.

補題より、 $Z_r(\mathbf{K})$ の正規部分群が考えられるから、

$Z_r(\mathbf{K})$ の元 d について

$\partial_r(d) = 0$ となる d の集合を \mathbf{K} の r 次元境界輪体群といい、 $B_r(\mathbf{K})$ と記す.



6. ホモロジー群

$B_r(\mathbf{K})$ が $Z_r(\mathbf{K})$ の正規部分群だから、次のような商群 $Z_r(\mathbf{K}) / B_r(\mathbf{K})$ が考えられる. これを \mathbf{K} の r 次ホモロジー群といい、 $H_r(\mathbf{K})$ と記す.

$$H_r(\mathbf{K}) = Z_r(\mathbf{K}) / B_r(\mathbf{K})$$

7. 自由アーベル群の階数 r

補題 鎖群 C , 輪体群 Z , 境界輪体群 B について

$$r(C) = r(Z) + r(C/Z)$$

proof. Z の一次独立元を a_1, a_2, \dots, a_r とする.

C/Z の一次独立元を $b_1 + Z, b_2 + Z, \dots, b_s + Z$ とする.

$a_1, a_2, \dots, a_r, b_1 + Z, b_2 + Z, \dots, b_s + Z$ は C の一次独立の元である.

\therefore

$$n_1(b_1 + Z) + n_2(b_2 + Z) + \dots + n_s(b_s + Z) = n_1b_1 + n_2b_2 + \dots + n_sb_s + Z \quad (1)$$

$$m_1a_1 + \dots + m_ra_r + n_1b_1 + n_2b_2 + \dots + n_sb_s = 0 \quad \text{とおく} \quad (2)$$

$a_1, a_2, \dots, a_r \in Z$

$$\therefore n_1b_1 + n_2b_2 + \dots + n_sb_s + Z = 0 \quad (3)$$

$$(1), (3) \text{ より } n_1(b_1 + Z) + n_2(b_2 + Z) + \dots + n_s(b_s + Z) = 0$$

C/Z で $b_1 + Z, b_2 + Z, \dots, b_s + Z$ は一次独立だから

$$n_1 = n_2 = \dots = n_s = 0$$

$$(2) \text{ より } m_1a_1 + \dots + m_ra_r = 0$$

a_1, a_2, \dots, a_r が一次独立だから $m_1 = m_2 = \dots = m_r = 0$

$$\therefore m_1 = m_2 = \dots = m_r = n_1 = n_2 = \dots = n_s = 0 \quad \text{q. e. d.}$$

(注) 鎖群 C , 輪体群 Z , 境界輪体群 B は次のように正規列を成し, 自由アーベル群である.

$$C \triangleright Z \triangleright B$$

引用文献

位相数学	河田 敬義 著	昭和 33	共立出版
トポロジー	小林 貞一 著	1987	近代科学社