

三次および四次方程式の解法（平成 13 年）

1. はじめに

三次および四次方程式の解法は、16世紀のイタリアで発見された。当時は、数は線分、平方は正方形の面積、立方は立方形の体積として幾何学的に表現された省略的代数の時代^{*)}で、三次方程式は、正の係数と正の解 x について、次のように表現された。

$$(1) x^3 + px = q \quad (2) x^3 = px + q \quad (3) x^3 + q = px$$

スキピオネ・デル・フェルロ *Scipione del Ferro*(1465 1526)は、(1)についてその解法を発見した。また、ニコロ・フォンタナ *Nicolo Fontana*(1499 1557) 別の名をタルタリア (*Tartaglia*) というが、1535年に再発見したといわれている。

当時、ミラノの高名な学者ジェロラモ・カルダーノ *Gerolamo Cardano*(1501 1576)は、タルタリアが三次方程式の解法を発見したとの噂を聞き、彼から解法を公表しないとの約束で(1)の解法を教わり、直ちに、(2),(3)への拡張に成功した。

四次方程式の解法は、カルダーノの門弟であったロドヴィコ・フェラーリ *Ludovico Ferrari*(1522 1565 頃)が発見した。カルダーノは、彼の書「アルス・マグナ」*Ars Magna, sive de reguis algebraicis*,1545で、タルタリアの三次方程式の解法と、自分の(2),(3)への拡張およびフェラーリの発見であることを明記して、四次方程式の解法を公表した。カルダーノがタルタニアとの約束を破ったとする非難もあるが、^{4),5)} カルダーノは、三次方程式の解法はフェルロが先であることをフェルロの遺稿の中で確認して公表したことも確認されている。¹⁾ *) ドイツの数学史家ネッセルマンによると、代数学の発展には、次の三段階があるといわれている。(Nesselman *Die Algebra der Griechen*, Berlin, 1842.

(1) 修辭的(*rhetorical*) (2) 省略的(*syncopatical*) (3) 記号的(*symbolical*)

2. 三次方程式の解法

Caldano の解法

三次方程式 について、 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

$$x = y - \frac{a}{3} \quad \text{とおくと} \quad y^3 + py + q = 0$$

$$y = u + v \quad \text{とおくと}$$

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

$$t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \quad (\text{分解方程式})$$

の解が u^3, v^3 だから,

$$t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$y = u + v, \quad uy + vy^2, \quad uy^2 + vy$ ただし, y は 1 の立方根で虚数とする.

よって, $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の解は,

$$x = -\frac{a}{3} + u + v, \quad -\frac{a}{3} + uy + vy^2, \quad -\frac{a}{3} + uy^2 + vy$$

(注) 三次方程式 の解を , , とし, 判別式を D とすると,

$$D = \{(a - b)(b - c)(c - a)\}^2 - 4 \times 27 \left\{ \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \right\}$$

D は、6 次の同次式で, , , の基本対称式を次のように置くと,

$$\begin{aligned} v_1 &= a + b + c \\ v_2 &= ab + bc + ca \\ v_3 &= abc \end{aligned}$$

D の各項は, $c v_1^{m_1} v_2^{m_2} v_3^{m_3}$ の形で表される. ただし, $m_1 + 2m_2 + 3m_3 = 6$
 このような m_1, m_2, m_3 の組は, 次の表のように 7 通り考えられる.

case	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
a_1	0	0	1	2	3	4	6
a_2	2	3	1	2	0	1	0
a_3	2	0	1	0	1	0	0
x の次数	2	3	4	4	4	5	6

Dは の4次式だから, (6), (7)の項は生じない.

よって,

$$D = A_1v_3^2 + A_2v_2^3 + A_3v_1v_2v_3 + A_4v_1^2v_2^2 + A_5v_1^3v_3 \quad \text{とおく}$$

, , に適当な値を代入して,

case	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	2	1	2	1	1
	2	-1	-1	1	1
	-1	0	-1	-1	0
	0	4	0	0	0
v ₁	3	0	0	1	2
v ₂	0	-1	-3	-1	1
v ₃	-4	0	2	-1	0

$$(1) \quad 4A_1 - 27A_5 = 0 \quad \dots\dots\dots$$

$$(2) \quad -A_2 = 4 \quad \dots\dots\dots$$

$$(3) \quad 4A_1 - 27A_2 = 0 \quad \dots\dots\dots$$

$$(4) \quad A_1 - A_2 + A_3 + A_4 - A_5 = 0 \quad \dots\dots$$

$$(5) \quad A_2 + 4A_4 = 0 \quad \dots\dots\dots$$

これを解いて, $A_1 = -27, A_2 = -4, A_3 = 18, A_4 = 1, A_5 = -4$

$$D = -27v_3^2 - 4v_2^3 + 18v_1v_2v_3 + v_1^2v_2^2 - 4v_1^3v_3$$

$$v_1 = a + b + c = 0, \quad v_2 = ab + bc + ca = p, \quad v_3 = abc = -q$$

$$D = -27q^2 - 4p^3 = -4 \times 27 \left\{ \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \right\}$$

(注) 次の三次方程式において, $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

$$x = y - \frac{a}{3} \quad \text{とおくと} \quad y^3 + py + q = 0 \quad \dots\dots\dots$$

$y^3 - u^3 - v^3 - 3uvy$ は, 次のように因数分解されるから,

$$y^3 - u^3 - v^3 - 3uvy = (y - u - v)(y - uy - vy^2)(y - uy^2 - vy) \quad \dots\dots\dots$$

の左辺を比較して, $p = -3uv, \quad q = -u^3 - v^3$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

$t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ (三次分解方程式) の解が u^3, v^3 だから,

$$t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x = -\frac{a}{3} + u + v, \quad -\frac{a}{3} + uy + vy^2, \quad -\frac{a}{3} + uy^2 + vy$$

3. 四次方程式の解法

Ferrariの方法

次の四次方程式において $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$x = y - \frac{a}{4}$ とおくと, 3次の項が消されて, 次の式となる.

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

$$y^4 = -py^2 - qy - r$$

両辺に $ty^2 + \frac{t^2}{4}$ を加えると

$$\left(y^2 + \frac{t}{2}\right)^2 = (t-p)y^2 - qy + \left(\frac{t^2}{4} - r\right) \dots\dots\dots(1)$$

右辺が, 完全平方式となるのは, $D = (-q)^2 - 4(t-p)\left(\frac{t^2}{4} - r\right) = 0$

$$t^3 - pt^2 - 4rt + (4pr - q^2) = 0 \quad (\text{三次の分解方程式})$$

または, $\frac{t^2}{4} - r = \frac{q^2}{4(t-p)} \dots\dots\dots(2)$

(1)(2)より $\left(y^2 + \frac{t}{2}\right)^2 = (t-p)y^2 - qy + \frac{q^2}{4(t-p)}$

$$= (t-p)\left(y - \frac{q}{2(t-p)}\right)^2$$

$$y^2 + \frac{t}{2} = \pm \sqrt{t-p} \left(y - \frac{q}{2(t-p)}\right)$$

これら 2 つの二次方程式の解を y_1, y_2, y_3, y_4 とすると, 求める四次方程式の解は,

$$x = -\frac{a}{4} + y_1, \quad -\frac{a}{4} + y_2, \quad -\frac{a}{4} + y_3, \quad -\frac{a}{4} + y_4$$

注 $y_1 + y_2 = \sqrt{t-p}, \quad y_1 y_2 = \frac{t}{2} + \frac{q}{2\sqrt{t-p}}$

$$y_3 + y_4 = -\sqrt{t-p}, \quad y_3 y_4 = \frac{t}{2} - \frac{q}{2\sqrt{t-p}}$$

故に, $y_1 y_2 + y_3 y_4 = t, \quad y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 2\sqrt{t-p}$

よって, $y_1 y_2 + y_3 y_4, \quad y_1 + y_2 - y_3 - y_4$ の値を求めると 4 次方程式は求まる.

Euler の方法

四次方程式 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ (3) において

$$x = u + v + w \quad \text{とおく}$$

$$x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + wu)$$

$$x^4 = (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(u^2 + v^2 + w^2)(uv + vw + wu) + 4(u^2 v^2 + v^2 w^2 + w^2 u^2) + 8uvw(u + v + w)$$

これらを (3) に代入すると,

$$(u^2 + v^2 + w^2)^2 + 2\{2(u^2 + v^2 + w^2) + p\}(uv + vw + wu) + 4(u^2 v^2 + v^2 w^2 + w^2 u^2) + p(u^2 + v^2 + w^2) + (8uvw + q)(u + v + w) + r = 0$$

$$\begin{cases} 2(u^2 + v^2 + w^2) + p = 0 \\ 8uvw + q = 0 \\ (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(u^2 v^2 + v^2 w^2 + w^2 u^2) + p(u^2 + v^2 + w^2) + r = 0 \\ u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2} \\ u^2 v^2 + v^2 w^2 + w^2 u^2 = \frac{p^2}{16} - \frac{r}{4} \\ uvw = -\frac{q}{8} \end{cases} \quad u^2, v^2, w^2 \text{ は, 次の分解方程式の解}$$

$$t^3 + \frac{p}{2} t^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right) t - \left(\frac{q}{8}\right)^2 = 0 \quad (\text{分解方程式})$$

解を t_1, t_2, t_3, t_4 とすると,

$$u = \pm\sqrt{t_1}, v = \pm\sqrt{t_2}, w = \pm\sqrt{t_3}, uvw = -\frac{q}{8}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}, & y_2 &= \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}, \\ y_3 &= -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}, & y_4 &= -\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} \end{aligned}$$

例 1. 三次方程式 $x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = 0$ を解け.

$$x = y - 1 \quad \text{とおく}$$

$$y^3 + 6y - 2 = 0$$

$$p = 6, \quad q = -2$$

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = (-1)^2 + 2^3 = 9$$

$$t_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{R} = 1 + 3 = 4$$

$$t_2 = -\frac{q}{2} + \sqrt{R} = 1 - 3 = -2$$

$$u = \sqrt[3]{4}, \quad v = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} \quad \text{これらは } uv = -\frac{p}{3} = -2 \quad \text{を満たす.}$$

$$\begin{aligned} x &= -1 + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}, \quad -1 + \sqrt[3]{4}y - \sqrt[3]{2}y^2, \quad -1 + \sqrt[3]{4}y^2 - \sqrt[3]{2} \\ &= -1 + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}, \quad -1 - \frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})i \end{aligned}$$

例 2. 四次方程式 $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 7 = 0$ を解け.

$$x = y - 1 \quad \text{とおく}$$

$$(y - 1)^4 + 4(y - 1)^3 + 8(y - 1)^2 + 4(y - 1) + 7 = 0$$

$$y^4 + 2y^2 - 4y + 8 = 0$$

Ferrari の方法

$$p = 2, \quad q = -4, \quad r = 8$$

$$\text{三次の分解方程式は } t^3 - 2t^2 - 32t + 48 = 0$$

左辺は、因数 $t - 6$ をもつから、 $t = 6$

$$\frac{t}{2} = 3, \quad t - p = 6 - 2 = 4$$

$$(y^2 + 3)^2 = 4y^2 + 4y + 1 = (2y + 1)^2$$

$$y^2 + 3 = 2y + 1, -2y - 1$$

$$y = 1 \pm i, -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$x = -1 + y \text{ だから}$$

$$x = \pm i, -2 \pm \sqrt{3}i$$

Euler の方法

$$p = 2, q = -4, r = 8$$

$$t^3 + t^2 - \frac{7}{4}t - \frac{1}{4} = 0$$

$$4t^3 + 4t^2 - 7t - 1 = 0$$

左辺は、因数 $x - 1$ をもつから

$$(t - 1)(4t^2 + 8t + 1) = 0$$

$$t = 1, -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{t_1} \sqrt{t_2} \sqrt{t_3} = uvw = -\frac{q}{8} = \frac{1}{2} \text{ だから}$$

$$\sqrt{t_1} = 1, \sqrt{t_2} = i\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right), \sqrt{t_3} = -i\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = -i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$y_1 = 1 + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) - i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1 - i$$

$$y_2 = 1 - i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1 + i$$

$$y_3 = -1 + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$y_4 = -1 - i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) - i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$x = -1 + y_1, -1 + y_2, -1 + y_3, -1 + y_4 \text{ だから}$$

$$x = \pm i, -2 \pm \sqrt{3}i$$

参考・参照文献

1. 代数学の歴史 ファン・デル・ベルデン著 加藤 明史訳 1994 現代数学社
B.L. van der Waerden, A History of Algebra From alkhwarizmi to Emmy Noether Springer-Verlag New York 1985
2. ガロアの理論 矢ヶ部 巖 著 1976 現代数学社
3. 代数学講義 高木 貞治著 1930 共立出版
4. *Longman Group UK Limited, Naffield Advanced Mathematics Mathematics Reader, Essex, 1994*
5. 数学史 小堀 憲 著 1956 朝倉書店
6. 数学の歴史 カール・ボイヤー著 加賀美 鉄雄 浦野 由有 訳 1984 朝倉書店
Carl B. Boyer, A History of Mathematics, John Wiley & Sons, inc. 1968 New York
7. ガウスが切り開いた道 S・G・ギンディキン著 三浦 信夫訳 1996
シュプリンガー・フェアラーク東京
Simon G. Gindikin, Tales of Physicists and Mathematicians, Birkhauser, 1988
8. わが人生の書 ギロラモ・カルダーノ著 青木 靖三 榎本 恵美子訳 1980
社会思想社
Gerolamo Cardano, De propria vifa liber, Hieromymi Cardani, Opera Omnia, Cura Caroli Sponii, Lyon, 1663