三平方の定理と黄金分割について（平成１６年）

1. 定理の起源

三平方の定理は，古代メソポタミアがその起源とも考えられ，*Carl B. Boyer* によると，「ピタゴラスの定理は残存するエジプト文書にはいかなる形でも記されていない， メソポタミアでは， 古バビロニアの書板においてさえもすでにこの定理が広く使われていたことが示されている．」[1)]

この定理は，古代インドの文書スルヴァスートラ（*Sulvasutra*）にも記されている．ＢＣ８世紀からＡＤ２世紀に書かれ， 古代エジプトと同様に縄を使って神殿の祭壇を建設する測量を記したもので，次のようなことが記されている．

1）直角を作図する方法として，ピタゴラスの組数 *3：4：5, 5：12：13, 8：15：17* などを用いる方法

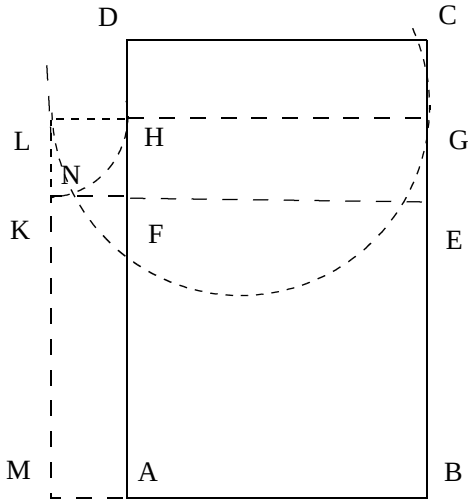
2）三平方の定理を用いて， 与えられた長方形と等積な正方形を作図する次の方法がある．長方形ＡＢＣＤにおいて，

（*1*）*AF = AB = BE* なる正方形 *ABEF* をとる．

（*2*）*CE*, *DF* を二等分して，線分 *GH* をとる．

（*3*）　*FK = LH = FH = AM* なるように三点 *L,K,M* をとる．

（*4*）　*LG* を斜辺とし，*LK=LN* を他の辺とする直角三角形 *GNL* を画くと *NG* が求める正方形の一辺である．



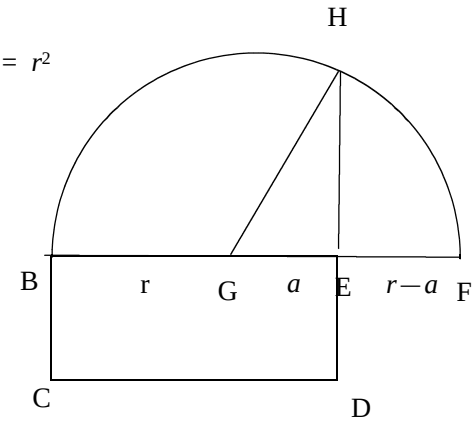
（注）ユークリッド原論第２巻１４

与えられた直線図形に等しい正方形をつくること．

（注）点 *E* は線分 *BC* の黄金分割点である．

与えられた直線図形を A とせよ．このとき直線図形 A に等しい直角平行四辺形 BD がつくられたとせよ．BE が ED に等しければ，正方形 BE が求めるもの．

もし等しくなければ，BE,ED の一方が大きい．BE が大きいとし，EF が ED に等しく BE が F まで延長され，BF の中点 G を中心とし，半径 BG の半円と ED の延長の交点を H とする．



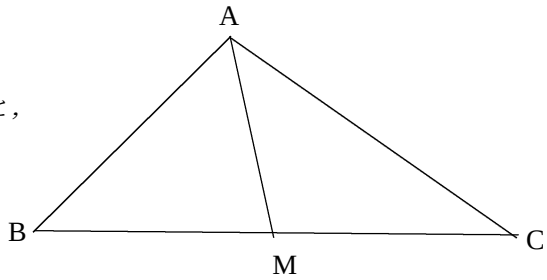
BE,EF に囲まれた矩形と GE 上の正方形との和は GF 上の正方形に等しい．$(r + a)(r-a) + a^2 = r^2$

ゆえに矩形 BE,EF と GE 上の正方形の和は HG 上の正方形に等しい．

ところが，EH,GE 上の正方形の和は HG 上の正方形に等しい．ゆえに矩形 BE,EF と GE 上の正方形の和は HE,GE 上の正方形の和に等しい．双方から GE 上の正方形を引けば BE,ED に囲まれる矩形は HE 上の正方形に等しい．HE を一辺とする正方形が求めるものである．

2. 定理の拡張

（*1*）*Pappus* の定理



△ ABC において，辺 BC の中点を M とすると，

$$AB^2 + AC^2 = 2(BM^2 + AM^2)$$

一般に，この定理の証明は三平方の定理を用いるが，この定理は三平方の拡張となっている．　$\angle A = \angle R$ のとき、$AM = BM$

$$\therefore\ 2(BM^2 + AM^2) = 4BM^2 = 4(\frac{BC}{2})^2 = BC^2$$

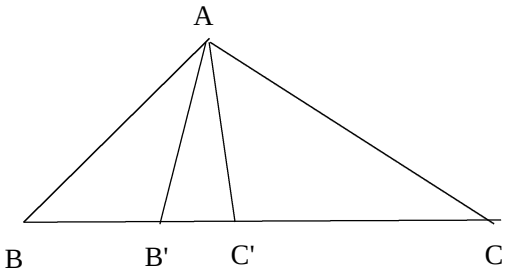
$$\therefore\ AB^2 + AC^2 = BC^2$$

（*2*）*Thabit ibn-Qurra* の定理 [1]

△ ABC において，点 A', B' を次のようにとる．

△ABC∽△ABB', △ABC∽△ACC' のとき $AB^2 + AC^2 = BC(BB' + CC')$

証明



$AB : BC = BB' : AB \quad \therefore\ AB^2 = BC \cdot BB'$

$AC : CC = BC : AC \quad \therefore\ AC^2 = BC \cdot CC'$

$\therefore\ AB^2 + AC^2 = BC(BB' + CC')$

$\angle A = \angle R$ のとき

点 B', C' は重なり

$BB' + CC' = BC$ だから $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (三平方の定理)

（注）$\angle A$ が鋭角の場合も同様に成り立つ． *Thabit ibn-Qurra* は証明を与えていない．

「アメリカ，フランス，ドイツ等の諸外国の教科書では，この方法で，三平方の定理を証明するのが一般的である．」「この方法はバスカラや会田安明にも見える．」

(*3*) 余弦定理

△ ABC において 頂点 AB の各対辺を， それぞれ a, b, c とすると

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$\angle A = \angle R$ のとき $a^2 = b^2 + c^2$

(*4*) トレミーの定理（*Ptolemy*）

円に内接する四角形 $ABCD$ について

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

$\angle A = \angle B = \angle R$ のとき $AB^2 + BC^2 = AC^2$

3. 黄金分割

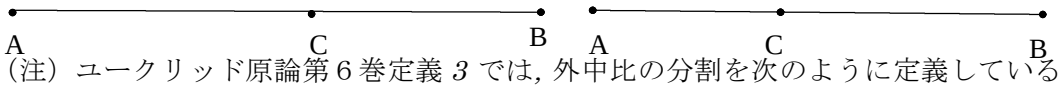
線分 AB を点 C で外中比（*extreme and mean ratio*）に分けるとき，この分割を黄金分割（*golden section*）と呼んでいる．

数学辞典 *Dictionary of Mathematics Second Edition, McGraw-Hill* によると，次のように記している．*The division of a line so that the ratio of the whole line to the larger interval equals the ratio of the larger interval to the smaller.*（線分上の一点で線分が大小二つの部分に分割されるとき， 線分の全長と大の長さの比が大の長さと小の

長さの比に等しいとき, この分割を黄金分割という.）

具体的に記すと, 次のようになる. 線分 AB 上で, 次の比例式が成り立つように点 C で線分 AB を分割することである.

AB : AC = AC : CB　(AC > CB)　　AB : CB = CB : CA　(AC < CB)



（注）ユークリッド原論第６巻定義 *3* では, 外中比の分割を次のように定義している.

線分は相等しくない部分に分けられ, 全体が大きい部分に対するように大きい部分が小さい部分に対するとき, 外中比に分けられるという. 外中比に分ける分割は, 大変調和がとれているので, 誰が名付けたのか分からないが黄金分割と呼ばれている.

1. 黄金分割の作図

ユークリッド原論第２巻１１に, 次のように記されている.

与えられた線分 AB 上に, 外中比に分かつ点 H を作図すること.

1) AB を一辺とする正方形 $ABCD$ をつくる.

2) AC の二等分点を E とする.

3) A の延長上に BE = EF なる点 F をとる.

4) AF を一辺とする正方形 $AFGH$ を描くと, 点 H が求めるものである.

AC = $2a$　とおくと

$$EF = BE = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}\,a$$

$$FA = EF - AE = (\sqrt{5} - 1)a$$

$$\square AHGF = AH^2 = (\sqrt{5} - 1)^2 a^2 = (6 - 2\sqrt{5})a^2$$

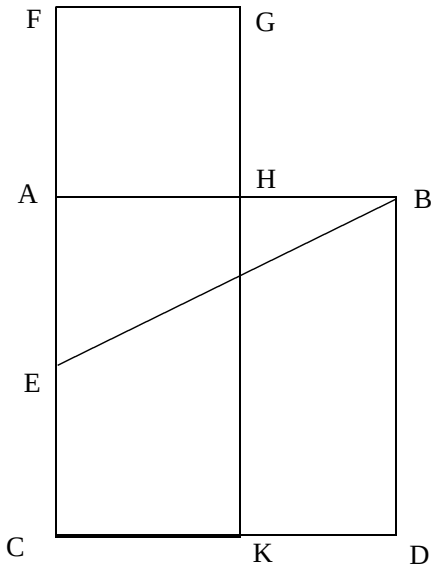
$$HB = AB - FA = 2a - (\sqrt{5} - 1)a = (3 - \sqrt{5})a$$

$$\square HKDB = DB \cdot HB = AB \cdot HB$$

$$= 2a(3 - \sqrt{5})a = (6 - 2\sqrt{5})a^2$$

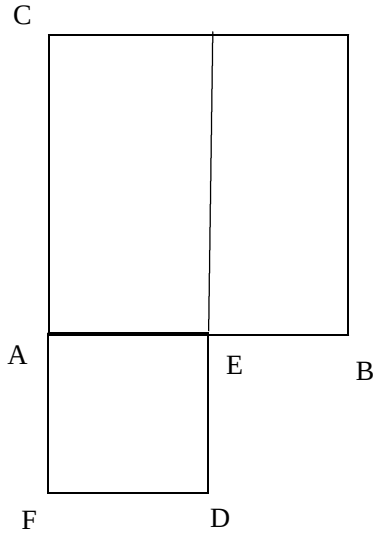
$$AH^2 = AB \cdot HB$$

$$\therefore\ AH : HB = AB : AH$$



また, ユークリッド原論第６巻３０によると,

点 E が線分 AB を図のように外中比に分かつとき， AB を一辺とする正方形 $ABHC$ とすると, この正方形と矩形 $FDGC$ は等しい.



AB ： AE ＝ AE ： EB

AB・EB ＝ AE^2

□EBHG ＝ AB・EB

□AFDE ＝ AE^2 だから

□EBHG ＝ □AFDE

両辺に□AEGLを加えると

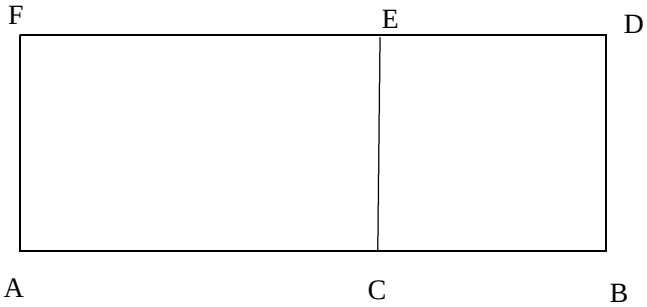
□CFDG ＝ □CABH

グノモンの定理

線分 AB を外中比に分ける点を C とする.（$BC > AC$）

$DB = BC$ なるように四辺形 $ABDF$ をとると

□ACEF ∽ □ABDF



∵ 点Cが線分ABを外中比に分けるから

BC ： CA ＝ AB ： BC

BC ＝ DB ＝ AF だから

AF ： CA ＝ AB ： DB

∴ □ACEF ∽ □ABDF

5. 正五角形に含まれる黄金分割

正五角形 $ABCDE$ の五本の対角線の交点 A',B',C',D',E' を結んでできる図形も正五角形である.

下図から △ABD'∽△ABC

∴ AD' ： AB ＝ AB ： AC

AD' ＝ E'C, AB ＝ AE' だから

∴ E'C : AE' = AE' : AC

∴ 点E'はACを外中比に分割する.

同様にして, 点 A', B', C', D' もそれぞれ

BD, CE, DA, EB の外中比の分割点である.

AB = 1 とし, AC = x とすると

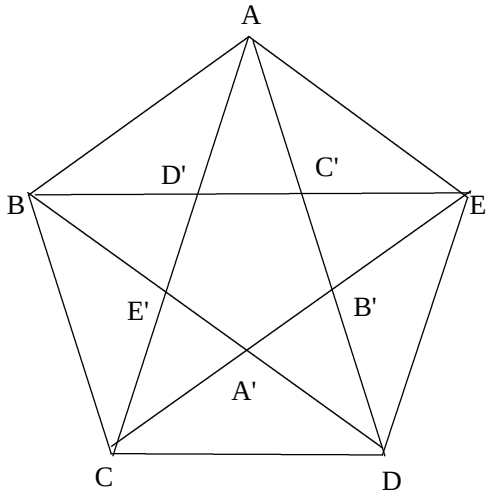
AC : AE' = AE' : E'C

AE' = x, E'C = AC−AE' = $x-1$

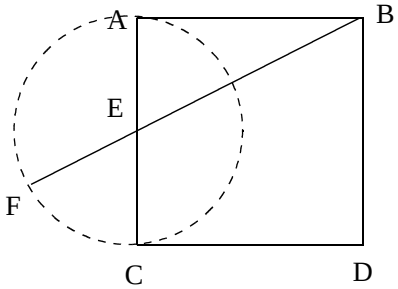
∴ $x : 1 = 1 : x-1$

$x^2 - x = 1 \quad (x > 0)$

$$x = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



このことから, 正五角形が次のように作図できることが分かる.



6. 正五角形の作図

1) 一辺 a の正方形 $ABCD$ を描く.

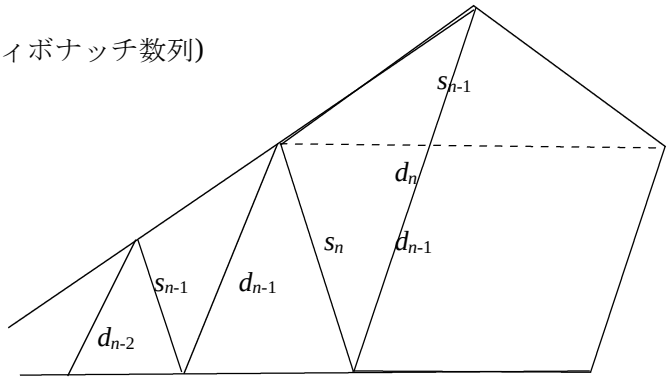
2) AC の中点 E を中心とし, 半径 $\frac{a}{2}$ の円と BE の交点を F とする.

3) 線分 AB（辺の長さ）と BF（対角線の長さ）を用いて, 正五角形は作図できる.

T. Sundara Row, Geometrical exercises in paper foldings, Madras, 1893 より引用。

7. Heller の定理

$d_n = d_{n-1} + s_{n-1}, \quad d_{n-1} = s_n$ (フィボナッチ数列)



8. 黄金分割の自己伝播性

線分 AB の黄金分割点を C_1 とする.

$AC_2 = C_1B$ なる点 C_2 をとると，点C_2 はAC_1 の黄金分割点である.

$AC_3 = C_2B$ なる点 C_3 をとると，点C_3 はAC_2 の黄金分割点である.

以下， 同様にして黄金分割点の列 C_1, C_2, C_3, … を作ることが出来る.

引用文献

1 ユークリッド原論　１９７１中村幸四郎、寺坂英孝、伊東俊太郎、池田美恵訳 共立出版

2. Thomas L. Heath, EUCLID THE ELEMENTS Vol.1,Vol.3, New York, Dover, 1956

3. 数学史読本　１９７０　佐藤健一編著　　東洋書店

4. Carl B. Boyer, A History of Mathematics, New York, Wiley, 1968

5. Thomas L. Heath, EUCLID THE ELEMENTS Vol.1,Vol.3, New York, Dover, 1956

6. Dictionary of Mathematics ond Edition, New York, McGraw-Hill, 2003

7. Roger Herz-Fishler, Mathematical History of the Golden Number, New York, Dover, 1998