

# 「博士の見つけた数式」(平成19年)

## 1. オイラー定数

定理 1. 次の級数は収束する.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \quad (n > 0)$$

証明

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \quad \text{とおく}$$

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \log \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \text{PRSQ}$$

$$\frac{1}{n+1} = \text{TRSQ}$$

$$\frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < 0$$

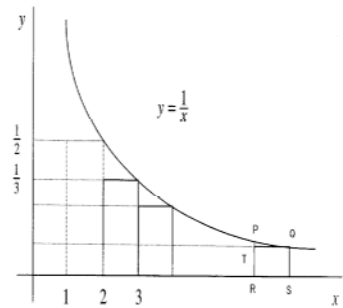


図 1

$c_n$  は単調減少 ..... (1)

$$c_n > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx - \log n = \log \frac{n+1}{n} > 0$$

$c_n$  は有界 ..... (2)

ワイヤーストラース(Weierstrass)の定理より,(1),(2)から  $c_n$  は収束する.

(注 1)  $\lim_n c_n = C$  とおく

$$C = \lim_n c_n \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

0.577218

$C$  をオイラー定数という.

(注 2) オイラー定数を用いて, 次の級数が求まる.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

$$b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{とおく}$$

$$a_n + b_n = \log 2n + C + o \dots\dots\dots (1)$$

$$2b_n = \log n + C + o \dots\dots\dots (2)$$

$$a_n = \log 2 + \frac{1}{2} \log n + \frac{C}{2} + o$$

$$b_n = \frac{1}{2} \log n + \frac{C}{2} + o \quad (o : \text{無限小})$$

$$a_n - b_n = \log 2$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$$

2. オイラー(Euler) の (ガンマ) 関数 (第二積分)

関数は, Euler が 1729 年に発見した.  $n!$  を一般化するために導入されてきた. 現在, 関数として定着しているが, この名称および記号  $\Gamma(x)$  は, Legendre による. (1814年)

$$(1) \quad \Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}} \quad (\text{Euler})$$

$$(2) \quad \Gamma(x) = \lim_n \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad (\text{Euler, Gauss (ガウス)})$$

次の式は,ワイヤーストラスにより導かれた.

$$(3) \quad \frac{1}{\Gamma(x)} = e^{cx} x \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{x}{n}) e^{-\frac{x}{n}} \quad (\text{Weierstrass})$$

ただし,  $C$  : オイラー定数

(注 3) 上記 3 つの数式は, 同値である. <sup>1)</sup> 簡単な計算で確かめられる.

(注 4) (2) について

ガンマ関数の定義式として, しばしば使用される.

定理 2  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  とおくと

$$\Gamma(x) = \Gamma(x)$$

証明

$$C(x) = \lim_n \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

$$\frac{t}{n} = t \quad \text{とおくと}$$

$$C(x) = \lim_n n^x \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt$$

$$\int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \left[ \frac{1}{x} t^x (1-t)^n \right]_0^1 + \frac{n}{x} \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^x dt$$

$$= \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{x(x+1)\dots(x+n)} \int_0^1 t^{x+n-1} dt$$

$$= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

$$P(x) = \lim_n \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

$$C(x) = P(x)$$

### 3. オイラー(Euler) の B ( ベータ ) 関数 ( 第一積分 )

定義 次の関数 B ( x, y ) を B ( ベータ ) 関数という .

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

(注 6) 記号 B ( x, y ) は , ビネ(Biner, J. P. M.)による .

定理 4.  $B(x, y) = \frac{C(x)C(y)}{C(x+y)}$

証明

$$B(x, y) = \left[ \frac{t^x}{x} (1-t)^{y-1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^x}{x} (y-1)(1-t)^{y-2} dt$$

$$= \frac{y-1}{x} \int_0^1 t^x (1-t)^{y-2} dt$$

$$= \frac{y-1}{x} B(x+1, y-1)$$

$$B(x, y) = \frac{y-1}{x} \frac{y-2}{x+1} \dots \frac{1}{x+y-2} B(x+y-1, 1)$$

$$B(x+y-1, 1) = \int_0^1 t^{x+y-2} dt$$

$$= \left[ \frac{t^{x+y-1}}{x+y-1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+y-1}$$

$$B(x, y) = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$$

(0) により

$$B(x, y) = \frac{C(x)C(y)}{C(x+y)}$$

(注7)

$$x = y = \frac{1}{2} \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{aligned} \frac{(C(\frac{1}{2}))^2}{C(1)} &= B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ &= \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt \end{aligned}$$

$t = \sin^2 h$  とおくと

$$= 2 \int_0^{\frac{p}{2}} dh = p$$

$$C(1) = 1 \quad \text{だから} \quad C(\frac{1}{2}) = \sqrt{p}$$

$$C(\frac{3}{2}) = C(1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}C(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{p}}{2} \dots\dots\dots(**)$$

定理 5  $C(1+x) = \int_0^1 e^{-t} t^x dt$

証明  $C(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$

$$t^x = t \quad \text{とおくと} \quad dt = \frac{dt}{x t^{x-1}}, \quad t = t \frac{1}{x}$$

$$C(x) = \int_0^1 e^{-t} \frac{1}{x} dt$$

$$x C(x) = \int_0^1 e^{-t} dt$$

$x C(x) = C(1+x)$  だから

$$C(1+x) = \int_0^1 e^{-t} \frac{1}{x} dt$$

(注 8)  $x = \frac{1}{2}$  とおくと

$$C\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{\sqrt{p}} e^{-t^2} dt \dots\dots\dots(***)$$

(\*\*), (\*\*\*) より

$$\int_0^{\sqrt{p}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{p}}{2} \quad (\text{de Moivre})$$

(注 9)  $x^2 = t$  とおくと

$$dx = \frac{dt}{2x} = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2} dt$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{p}} e^{-t^2} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{p}} e^{-t} t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} C\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= C\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{p}}{2} \end{aligned}$$

#### 4. リーマン (Riemann) の f (ゼータ) 関数

オイラーが 1737 年に発見した数式であるが、後年リーマンが、この数式が数論で重要な役割をすることを指摘し (1860 年)、以後、リーマンのゼータ関数と呼ばれている。

定義 次の関数  $f(s)$  をゼータ関数という。

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1)$$

定理 6  $f(s)$  は収束する。

証明

$$S_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^s} \quad (s > 1) \text{ とおくと}$$

$$\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} < \frac{2}{2^s} = \frac{1}{2^{s-1}}$$

$$\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} < \frac{4}{4^s} = \frac{1}{4^{s-1}}$$

.....

$2^p - 1$  項の和を  $S_{2^p - 1}$  とおくと

$$S_{2^p-1} = \frac{1}{1^{s-1}} + \frac{1}{2^{s-1}} + \dots + \frac{1}{2^{(p-1)(s-1)}} \\ < \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^{s-1}}$$

$S_n$  は有界である.

$S_n$  は単調増加である.

ワイヤーストラースの定理によって  $f(s)$  は収束する.

(注 10) 調和級数は発散する.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \dots \\ = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \dots + \frac{2^{m-1}}{2^m} + \dots \\ = 1 + \frac{m}{2} + \dots$$

$$2^m \text{ 項の和を } S_{2^m} \text{ とおくと } \lim_m S_{2^m} = \\ \lim_n S_n =$$

(補助定理 1) (無限等比級数)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1)$$

定理 7  $f(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad (p: \text{素数}, s > 1)$

証明  $\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = (1 + \frac{1}{2^s} + (\frac{1}{2^s})^2 + \dots)(1 + \frac{1}{3^s} + (\frac{1}{3^s})^2 + \dots) \\ \times (1 + \frac{1}{5^s} + (\frac{1}{5^s})^2 + \dots) \dots \\ = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \\ = f(s)$

(補助定理 2)  $0 < x < \frac{1}{2}$  のとき  $\frac{1}{1-x} < 10^x$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{1}{2!}(2x)^2 + \dots > 1 + 2x$$

$$1 - x < \frac{1}{2} \text{ だから}$$

$$e^{2x}(1-x) > (1+2x)(1-x) = 1 + x(1-2x) > 1$$

$$e^{2x}(1-x) > 1$$

$$1 - x < \frac{1}{2} \text{ だから } e^{2x} < \frac{1}{1-x}$$

$$e^{2x} < 10^x \text{ だから}$$

$$\frac{1}{1-x} < 10^x$$

定理 8 次の無限級数は、発散する。

$$\sum_p \frac{1}{p} \quad (p: \text{素数})$$

証明 
$$\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = (1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \dots)(1 + \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + \dots) \times (1 + \frac{1}{5} + (\frac{1}{5})^2 + \dots) \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

(注10) より

$$\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \dots \dots \dots ( )$$

補助定理2 により

$$\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} < \prod_p 10^{\frac{1}{p}} = 10^{\sum_p \frac{1}{p}} \dots \dots \dots ( )$$

( ) ( ) より

$$\sum_p \frac{1}{p} =$$

(注 11) この定理は、素数の個数は無限であることを語っている。

## 引用文献

- 1) E. T. Whittaker and G. N. Watson, Modern Analysis, Cambridge University Press, (1952)
- 2) 解析概論 改訂第三版 高木 貞治 著 岩波書店 1969
- 3) ガンマ関数入門 E アルティン著 上野 健爾 訳 日本評論社 2004
- 4) H. M. Edwards, Riemann's Zeta Function, Dover, (2001)
- 5) 数学の夢 素数からのひろがり 黒川 信重 著 岩波書店 1998
- 6) J. Havil, Gamma: Exploring Euler's Constant, Princeton University Press, (2003)
- 7) 博士の愛した数式 小川 洋子著 新潮文庫 2006