

令和元年 10 月 22 日

フーリエ級数について

- 宇宙の全ての波は、周期が 2π の正弦と余弦の線形方程式で表現出来る。

例

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \text{ とすると, } f_1(x) + f_2(x) \text{ は周期が } 2\pi \text{ の}$$

関数になる。

- 波 $f(x)$ は、次のように表現出来るとフーリエは述べている。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (\text{線形方程式})$$

- 係数 a_n, b_n を求める工夫 :

1. より、波は周期 2π になるから、区間 $-\pi < x < \pi$ で考える。

両辺に $\cos nx, \sin nx$ を掛けて、積分すると次のように係数 a_n, b_n が決まる。

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \end{aligned}$$

証明 :

$$\begin{aligned} \cdot \quad &\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \\ \cdot \quad &\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \\ \cdot \quad &\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \end{aligned}$$

により

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \right) \cos nx dx \\ &= \pi a_n \\ \therefore \quad a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \right) \sin nx dx \\ &= \pi b_n \\ \therefore \quad b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned}$$

4. フーリエ係数の計算

- $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$
- 部分積分を繰り返して、式の次数を下げる。

(1) $f(x) = x$ のとき,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx$$

$x \cos nx$: 奇関数 だから, $a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right)$$

$$= \frac{2(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\therefore f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}$$

(2) $f(x) = x^2$ のとき,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[x^2 \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \frac{\sin nx}{n} dx \right) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left(\left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left(\frac{\pi}{n}(-1)^{n-1} + \left[\frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{4}{n^2} (-1)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx \right) \\ &= -\frac{4\pi}{n} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n} \sin nx$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad f(x) &= \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ -1 & (-\pi < x < 0) \end{cases} \text{ のとき,} \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-1) \cos nx \, dx + \int_0^\pi \cos nx \, dx \right\} \\
&= 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-1) \sin nx \, dx + \int_0^\pi \sin nx \, dx \right\} \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^\pi = \begin{cases} 0 & (n : even) \\ \frac{4}{n\pi} & (n : odd) \end{cases} \\
\therefore f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1)x \\
&= \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad f(x) &= |x| \\
&= \begin{cases} x & (0 \leq x < \pi) \\ -x & (-\pi < x \leq 0) \end{cases} \text{ のとき,} \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \left\{ (-x) \cos nx \, dx + \int_0^\pi x \cos nx \, dx \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 \frac{\sin nx}{n} \, dx + \left[x \frac{\sin nx}{n} \right]_0^\pi - \int_{-\pi}^0 x \frac{\sin nx}{n} \, dx \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{\cos nx}{n^2} \right]_{-\pi}^0 - \left[-\frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^\pi \right\} \\
&= \frac{1}{n^2\pi} \left\{ \left[-\cos nx \right]_{-\pi}^0 - \left[-\cos nx \right]_0^\pi \right\} \\
&= \begin{cases} 0 & (n : even) \\ -\frac{4}{n^2\pi} & (n : odd) \end{cases} \\
a_0 &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-x) \, dx + \int_0^\pi x \, dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi \right\} = \pi \\
\therefore f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)
\end{aligned}$$

- 上の例で分かるように、いろいろの関数 $f(x)$ が \sin , \cos の線形表示出来ることが分る。
- さらに興味深いことは、次のように無限級数が分かることです。

(1) で $f(x) = x$ のとき,

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}$$

$$\therefore x = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

ここで $x = \frac{\pi}{2}$ とおくと,

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

$$\therefore 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} \quad (\text{ライプニッツの級数})$$

(2) で $f(x) = x^2$ のとき

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n} \sin nx$$

$$\therefore x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$$

$$- 4\pi \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$$

ここで, $x = \pi$ とおくと,

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right)$$

$$\therefore \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{オイラーが解決したバーゼルの難題})$$

引用文献

1. Eli Maor, TRIGONOMETRIC Delights, Princeton Univ Press, 1997