

## 対称式の因数分解について（平成12年）

1) 対称式  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$  を因数分解することを考えてみたい。高等学校の数学では、通常、次のように教えている。

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= (a^3 + b^3) + c^3 - 3abc \\
 &= \{(a + b)^3 - 3ab(a + b)\} + c^3 - 3abc \\
 &= \{(a + b)^3 + c^3\} - \{3ab(a + b) + 3abc\} \\
 &= (a + b + c)\{(a + b)^2 - (a + b)c + c^2\} - 3ab(a + b + c) \\
 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)
 \end{aligned}$$

この方法は分かり易いが、技巧的である。

対称式を、基本対称式で表す方法で、この因数分解を行うとどのようになるであろうか。

$$f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \quad \text{とおく}$$

$c = 0$  を代入すると

$$\begin{aligned}
 f(a, b, 0) &= a^3 + b^3 \\
 &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

ここで、2元の基本対称式  $a + b$ ,  $ab$  を、次の3元の基本対称式  $a + b + c$ ,  $ab + bc + ca$ ,  $abc$  に置き換え  $(a + b + c)^3 - 3(ab + bc + ca)(a + b + c) - kabc$

とし、 $f(a, b, c)$  との差を  $r(a, b, c)$  とする。

$$\begin{aligned}
 r(a, b, c) &= f(a, b, c) - (a + b + c)^3 + 3(ab + bc + ca)(a + b + c) - kabc \quad \text{とおく} \\
 r(a, b, c) &= k abc \dots\dots\dots \\
 k = 0 \text{ のとき } r(a, b, c) &= 0
 \end{aligned}$$

より  $0 = f(a, b, c) - (a + b + c)^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$

$$\begin{aligned}
 f(a, b, c) &= (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) \\
 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)
 \end{aligned}$$

さらに、この対称式は次のように因数分解される。

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + by + cy^2)(a + by^2 + cy)$$

ただし,  $y$  は1の立方根

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \quad \text{とおく}$$

$$a^2 - (b + c)a + (b^2 - bc + c^2) = 0$$

これを  $a$  について解くと

$$\begin{aligned} a &= c - (b - c)y, \quad c - (b - c)y^2 \\ &= -by - cy^2, \quad -by^2 - cy \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = (a + by + cy^2)(a + by^2 + cy)$$

$$\text{よって, } f(a, b, c) = (a + b + c)(a + by + cy^2)(a + by^2 + cy)$$

これは, 高校生のよくする方法だが, 次のものは, 難しいがすっきりする.

$$f(a, b, c) = f(a, by, cy^2) = f(a, by^2, cy) \quad \text{だから,}$$

$f(a, b, c)$  は, 因数  $a + b + c$  をもつから,  $a + by + cy^2, a + by^2 + cy$  も因数にもつ.

$$f(a, b, c) = (a + b + c)(a + by + cy^2)(a + by^2 + cy)$$

このことから, 3次方程式  $f(x, b, c) = 0$  即ち,  $x^3 - 3bcx + (b^3 + c^3) = 0$  は, 代数演算で解けて, その解は次のようになることが分る.

$$x = -b - c, \quad -by - cy^2, \quad -by^2 - cy \quad (\text{Cardanoの公式})$$

2) 対称式  $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) - 8abcd$  を因数分解することを考えてみたい.

$f(a, b, c, d) = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) - 8abcd$  とおく  
 $d = 0$  を代入すると

$$\begin{aligned} f(a, b, c, 0) &= a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \\ &= (a + b + c)^4 - 4(a + b + c)^2(ab + bc + ca) + 8abc(a + b + c) \end{aligned}$$

3元の基本対称式  $a + b + c, ab + bc + ca, abc$  を4元の基本対称式

$a + b + c + d, ab + ac + ad + bc + bd + cd, abc + abd + acd + bcd, abcd$  に置き換えて,  $f(a, b, c, d)$  との差を  $r(a, b, c, d)$  とする.

$$f(a, b, c, d) = f(a, b, c, d) - (a + b + c + d)^4$$

$$+ 4(a + b + c + d)^2(ab + ac + ad + bc + bc + bd + cd)$$

$$- 8(abc + abd + acd + bcd)(a + b + c + d) + kabcd \text{ とおく}$$

.....

$$r(a, b, c, d) = (k - 16)abcd$$

$k = 16$  のとき  $r(a, b, c, d) = 0$

より  $0 = f(a, b, c, d) - (a + b + c + d)^4$

$$+ 4(a + b + c + d)^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$- 8(abc + abd + acd + bcd)(a + b + c + d) + 16abcd$$

$$f(a, b, c, d) = (a + b + c + d)^4$$

$$- 4(a + b + c + d)^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$+ 8(abc + abd + acd + bcd)(a + b + c + d) - 16abcd$$

$a + b + c + d = t$  とおくと

$$f(a, b, c, d) = -t^4 + 2(a + b + c + d)t^3 - 4(ab + ac + ad + bc + bd + cd)t^2$$

$$+ 8(abc + abd + acd + bcd)t - 16abcd$$

$$= -(t - 2a)(t - 2b)(t - 2c)(t - 2d)$$

$t = a + b + c + d$  と置きもどすと

$$f(a, b, c, d) = -(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)$$

このことから、次の4次方程式は代数的に解けることが分かった。

$$f(x, b, c, d) = 0 \text{ 即ち,}$$

$$x^4 - 2(b^2 + c^2 + d^2)x^2 - 8bcdx + (b^4 + c^4 + d^4) - 2(b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) = 0$$

(注) この因数分解は、4次方程式のオイラーの解法から求めることができる。

#### 参考図書

1. 数と式 (代数入門)	遠山 啓 著	1990	講談社
2. 初等代数学	成田 正雄 著	昭和41年	共立出版
3. 代数学講義	高木 貞治 著	昭和5年	共立出版

の補助計算

$$r(a, b, c, d) = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)$$

$$- 8abcd - (a + b + c + d)^4$$

$$+ 4(a + b + c + d)^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$- 8(abc + abd + acd + bcd)(a + b + c + d) + kabcd$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)$$

$$= (a + b + c + d)^4 - 4(a + b + c + d)^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$+ 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2$$

$$+ 4(a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd) - 4abcd$$

$$a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2$$

$$= (ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2$$

$$- 2(a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd) + 2abcd$$

$$r(a, b, c, d) = (a + b + c + d)^4 - 4(a + b + c + d)^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$+ 4(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2$$

$$+ 4(a + b + c + d)(ab + ac + ad + bc + bd + cd) - 4abcd$$

$$- 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2 + 4(a + b + c + d)(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$- 4abcd - 8abcd - (a + b + c + d)^4$$

$$+ 4(a + b + c + d)^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$- 8(abc + abd + acd + bcd)(a + b + c + d) + kabcd$$

$$= (k - 16)abcd$$