

対称式の因数分解について(平成12年)

1) 対称式を $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 因数分解することを考えてみたい。高等学校の数学では、通常次のように教えている。

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= (a^3 + b^3) + c^3 - 3abc \\
 &= \{(a + b)^3 - 3ab(a + b)\} + c^3 - 3abc \\
 &= \{(a + b)^3 + c^3\} - \{3ab(a + b) + 3abc\} \\
 &= (a + b + c)\{(a + b)^2 - (a + b)c + c^2\} - 3ab(a + b + c) \\
 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)
 \end{aligned}$$

この方法は分かり易いが、技巧的である。

対称式を基本対称式で表す方法で、この因数分解を行うとどのようになるであろうか。

$$f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \quad \text{とおく}$$

$c = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned}
 f(a, b, 0) &= a^3 + b^3 \\
 &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) \quad \dots\dots\dots \quad \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

ここで、2元の基本対称式を $a + b, ab$ 次の3元の基本対称式 $a + b + c, ab + bc + ca, abc$ に置き換える。

$$\begin{aligned}
 r(a, b, c) &= f(a, b, c) - (a + b + c)^3 + 3(ab + bc + ca)(a + b + c) - kabc \\
 r(a, b, c) &= k abc \quad \dots\dots\dots \quad \textcircled{2} \quad \text{とおく}
 \end{aligned}$$

$$(a + b + c)^3 - 3(ab + bc + ca)(a + b + c) - kabc$$

$$k = 0 \text{ のとき } r(a, b, c) \equiv 0$$

$$\textcircled{2} \text{ より } 0 = f(a, b, c) - (a + b + c)^3 + 3(ab + bc + ca)(a + b + c) - kabc$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(a, b, c) &= (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) \\
 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)
 \end{aligned}$$

さらに、この対称式は次のように因数分解される。

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$$

ただし、 ω は 1 の立方根

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \quad \text{とおく}$$

$$a^2 - (b+c)a + (b^2 - bc + c^2) = 0$$

これをに a について解くと

$$a = c - (b-c)\omega, \quad c - (b-c)\omega^2$$

$$= -b\omega - c\omega^2, \quad -b\omega^2 - c\omega$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = (a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$$

$$\text{よって } f(a, b, c) = (a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$$

これは、高校生のよくする方法だが、次のものは難しいがすつきりする。

$$\therefore f(a, b, c) = f(a, b\omega, c\omega^2) = f(a, b\omega^2, c\omega) \quad \text{だから}$$

$f(a, b, c)$ は 因数 $a + b + c$ をもつから $a + b\omega + c\omega^2, a + b\omega^2 + c\omega$ も因数にもつ。

$$\therefore f(a, b, c) = (a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$$

このことから、3次方程式 $f(x, b, c) = 0$ 即ち、 $x^3 - 3bcx + (b^3 + c^3) = 0$ は
代数演算で解けて、その解は次のようになることが分る。

$$x = -b - c, \quad -b\omega - c\omega^2, \quad -b\omega^2 - c\omega \quad (\text{Cardanoの公式})$$

2) 対称式 $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) - 8abcd$ を 因数分解することを考えてみたい。

$f(a, b, c, d) = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) - 8abcd$ とおく
 $d = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(a, b, c, 0) &= a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \\ &= (a + b + c)^4 - 4(a + b + c)^2(ab + bc + ca) + 8abc(a + b + c) \end{aligned}$$

3元の基本対称式を $a + b + c, ab + bc + ca, abc$ 4元の基本対称式

$a + b + c + d, ab + ac + ad + bc + bd + cd, abc + abd + acd + bcd, abcd$
に置き換えて、 $f(a, b, c, d)$ との差をと $r(a, b, c, d)$ する。

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &= f(a, b, c, 0) - (a + b + c + d)^4 \\ &\quad + 4(a + b + c + d)^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \\ &\quad - 8(abc + abd + acd + bcd)(a + b + c + d) + kabcd \quad \text{とおく} \end{aligned}$$

.....③

$$r(a, b, c, d) = (k-16) abcd$$

$$k = 16 \text{ のとき } r(a, b, c, d) \equiv 0$$

③より $0 = f(a, b, c, d) - (a + b + c + d)^4$

$$+ 4(a + b + c + d)^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$- 8(abc + abd + acd + bcd)(a + b + c + d) + 16abcd$$

$$f(a, b, c, d) = (a + b + c + d)^4$$

$$- 4(a + b + c + d)^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$+ 8(abc + abd + acd + bcd)(a + b + c + d) - 16abcd$$

$a + b + c + d = t$ とおくと

$$f(a, b, c, d) = -t^4 + 2(a + b + c + d)t^3 - 4(ab + ac + ad + bc + bd + cd)t^2$$

$$+ 8(abc + abd + acd + bcd)t - 16abcd$$

$$= -(t-2a)(t-2b)(t-2c)(t-2d)$$

$t = a + b + c + d$ と置きもどすと

$$f(a, b, c, d) = -(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)$$

のことから、次の4次方程式は代数的に解けることが分かった。

$f(x, b, c, d) = 0$ 即ち

$$x^4 - 2(b^2 + c^2 + d^2)x^2 - 8bcdx + (b^4 + c^4 + d^4) - 2(b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) = 0$$

(注)この因数分解は、4次方程式のオイラーの解法から求めることができる。

参考図書

- | | | | |
|--------------|---------|-------|------|
| 1. 数と式（代数入門） | 遠山 啓 著 | 1990 | 講談社 |
| 2. 初等代数学 | 成田 正雄 著 | 昭和41年 | 共立出版 |
| 3. 代数学講義 | 高木 貞治 著 | 昭和5年 | 共立出版 |

③の補助計算

$$r(a, b, c, d) = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)$$

$$- 8abcd - (a + b + c + d)^4$$

$$+ 4(a + b + c + d)^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$- 8(abc + abd + acd + bcd)(a + b + c + d) + kabcd$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)$$

$$= (a + b + c + d)^4 - 4(a + b + c + d)^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$+ 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2$$

$$+ 4(a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd) - 4abcd$$

$$a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2$$

$$= (ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2$$

$$- 2(a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd) + 2abcd$$

$$r(a, b, c, d) = (a + b + c + d)^4 - 4(a + b + c + d)^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$+ 4(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2$$

$$+ 4(a + b + c + d)(ab + ac + ad + bc + bd + cd) - 4abcd$$

$$- 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2 + 4(a + b + c + d)(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$- 4abcd - 8abcd - (a + b + c + d)^4$$

$$+ 4(a + b + c + d)^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$- 8(abc + abd + acd + bcd)(a + b + c + d) + kabcd$$

$$= (k - 16)abcd$$