ユークリッドの互除法（令和元年）

ユークリッドの互除法は, 現在では初等中等教育では教えられていない. 私は高校生の頃に知った計算法である. 教科書の片隅に, 小さく申し訳なさそうに記されていた.

1. ２つの整数 a, b の最大公約数を求めるのに使われる方法である.

1） b を a で割ると余り r, 商 q を得るとき,

$$b = a\,q + r$$

2）続いて a を r で割ると余り r_1, 商 q_1 を 得て,

$$a = r\,q_1 + r_1$$

3）これを繰り返していくと, 余りは次のように次第に小さくなり,

$$(b > a) > r > r_1 > r_2 > \cdots\cdots$$

$r_{m+1} = 0$ となる.

4）このとき, r_m が a, b の最大公約数である.

2. 有理整数 a, b の最大公約数 d は, 適当な $h, k \in \mathrm{Z}$ を用いて, 次のように表すことが出来る.

$$d = h\,a + k\,b$$

これは, 大学教養部のときに学んだことである.

3. $b = a_1,\ a = a_2,\ r = a_3,\ r_1 = a_4,\ \cdots\cdots$ 即ち, $r_{n-3} = a_n$ とおくと, 隣り合う有理整数の公約数は次のように表される.

$$(a_1, a_2) = (a_2, a_3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(a_{n-1}, a_n) = (a_n, a_{n+1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= (a_m, 0)$$

4. ユークリッドの互除法における隣り合う有理数列の一般項は次のように表される.

$$a_n = h_n\,a + k_n\,b \quad \text{ただし}, h_n, k_n \in \mathrm{Z}$$

証明 $i)$ $n = 1$ のとき

$$a_1 = b$$

$$= 0 \times a + 1 \times b$$

$h_1 = 0,\ k_1 = 1$ となり成り立つ.

$n = 2$ のときも, 同様に成り立つ.

ii) $n \leqq i$ のとき，成り立つと仮定する，

$$a_i = h_i\ a + k_i\ b, \quad a_{i-1} = h_{i-1}\ a + k_{i-1}\ b$$

$a_{i-1} = a_i\ q + a_{i+1}$ だから $a_{i+1} = a_{i-1} - a_i\ q$

$$\therefore \quad a_{i+1} = (\ h_{i-1}\ a + k_{i-1}\ b\ ) - (\ h_i\ a + k_i\ b\ )\ q$$

$$= (\ h_{i-1} - h_i\ q\ )\ a + (\ k_{i-1} - k_{i-}\ q\ )\ b$$

$h_{i-1} = h_i\ q + h_{i+1}$, $k_{i-1} = k_i\ q + k_{i+1}$ とすることが出来るから，

$$a_{i+1} = h_{i+1}\ a + k_{i+1}\ b$$

$n = i + 1$ で成り立つ.

故に，全ての n について成り立つことが分かった.

参考文献

1. 代数学入門　　永田　雅宜　吉田　憲一　著　培風館　２００２