

## 行列の単因子について (平成 25 年)

次の操作で、行列は変わらない。(行列の定義から自明)

基本変形 1) 行 (列) を入れ換える.

2) 行 (列) の定数倍を他の行 (列) に加える.

1. 行列  $A = [ a_{ij} ]$  の最小元素を行, 列の入れ換え 1) によって,  $(1, 1)$  へ移す.

その行列を改めて  $A = [ a_{ij} ]$  とする.

2)  $a_{1j}$  を  $a_{11}$  で割ると

$$a_{1j} = a_{11} q + r \quad (0 \leq r < a_{11}) \text{ となる.}$$

2) より

$$a_{1j} - a_{11}q = r \quad \text{注 } (1, j) \text{ 元素が } r \text{ になる.}$$

$r \neq 0$  と仮定すると  $a_{1j}$  が  $r$  となり,  $a_{11}$  が最小元素であることに矛盾する.

$$\therefore r = 0$$

3. よって  $(1, 1)$  元素以外の第 1 行の元素は全て 0 とすることが出来る.

4. 同様にして,  $(1, 1)$  元素以外の第 1 列の元素は全て 0 となる.

5. こうして出来た行列を

$$B = [ b_{ij} ] \text{ とする.}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & b_{kl} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

6.  $b_{1j} = b_{i1} = 0$  ただし  $b_{11} \neq 0$

残りの  $(n - 1)^2$  個の元素  $b_{ij}$  ( $2 \leq i, j$ ) のうち,  $b_{11}$  で割り切ることが出来ない元素があると仮定し, それを  $b_{pq}$  とすると,

2) より 1 行に  $k$  行の元素を加えると,  $(1, 1)$  元素はそのまま,  $(1, q)$  元素が  $b_{pq}$  になる.

$b_{pq}$  を  $b_{11}$  で割ると

$$b_{pq} = b_{11} s + t \quad (0 \leq t < b_{11}) \text{ となる.}$$

2) より

$$b_{pq} - b_{11} s = t \quad \text{注 } (1, q) \text{ 元素が } t \text{ になる.}$$

$t \neq 0$  と仮定すると  $b_{pq}$  が  $t$  となり,  $b_{11}$  が最小元素であることに矛盾する.

$$\therefore t = 0$$

$$\therefore b_{11} \mid b_{pq}$$

7. よって(1, 1) 元素以外第 1 行第 1 列の元素は 全て 0 で, (p, q) 元素は全て (1, 1) 元素で割り切れる. ( $2 \leq p, q$ )

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & & \\ \vdots & & b_{kk} & \\ 0 & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

8. 続いて, 第 2 行第 2 列以下についても同様にして, 対角線上の元素を除いて全て元素は 0 になり,  $b_{11} \mid b_{22} \mid b_{33} \mid \cdots \mid b_{nn}$  となる.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & b_{33} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$

(注) ネーター環の一例である.

#### 参 考 文 献

行列と行列式 古屋 茂 著 1959 培風館