

英国の教科書に見る「差分」の指導(平成12年)

*A Teaching Method of Difference as we see it
in the Text Books of England*

October 27, 2000

1. はじめに

「分数ができない大学生」と題する本が話題をよび、数学教育の在り方が問われる昨今である。どのようにすれば数学の概念を確実に生徒の脳裏に蓄積させることが出来るか。

目を英国に転じ、英国の数学教育、なかでも教室でどのような指導が行われているか垣間見ることにはしたい。

英国における教科書のひとつ *Nuffield Advanced Mathematics Book4 Longman Group UK limited 1994* より「差分」が、どのように取り扱われているかその概要を記してみた。

各項目は、生徒間または教師を交えた討論形式で、生徒の作業活動を通して授業が進行される。例題で解法の手順を教える(マニュアル化する)のではなく、算盤を教えるように数学の手法を訓練する伝統的な学校教育の手法である。

Intoduction

What is the traditional education? It is a drill in solving to a problem, not merely the cramming in of knowlege.

The book titled "College students who can not solve fractions," becomes the talk of town in Japan. Responding to the book, they are considering who or what has given such students admissions to college and regarding the entrance exam and its system as questioable.

I think what education has made such students is the most important response. The ideal method of education is the traditional one, not the education stressing rote learning.

How is it provided in foreign countries especially in the U.K. Let us look into the text books: Nuffield Advanced Mathematics Books Longman Group UK Ltd., 1994.

2. 差分表

2次多項式 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ (0 x 8) について

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	-3	-4	-3	0	5	12	21	32	45

(表1)

多項式の隣り合う値の変化は、次のようになる。

$f(x)$	-3	-4	-3	0	5	12	21	32	45
	-1	1	3	5	7	9	11	13	
	2	2	2	2	2	2	2		
	0	0	0	0	0	0			

(表2)

等間隔の値 x に対して, 関数値の差で出来る表を差分表という. $-1, 1, 3, 5, \dots$ を第一階差, $2, 2, 2, 2, \dots$ を第二階差という.

$f(x)$ が2次の多項式するとき, 第二階差が定数 (0) となる. x は, 等間隔であるが, 全ての値をとる必要はない. $x = 0$ から始まる必要もない.

3. 対角列から差分表を作ること

a. 第三階差が定数のとき, 次の * に適す数を求めよ.

2	*	*	*	*	*	*	*
1	*	*	*	*	*	*	
0	*	*	*	*			
2	*	*	*				

(表3)

($2, 1, 0, 2, 0, 0, \dots$)を第一対角列といい, この表を($2, 1, 0, 2, 0, 0, \dots$)差分表という.

b. ($0, 1, 0, 0, \dots$)差分表を作れ.

x	0	1	2	3	4	...	(注) $f(x) = x$
$f(x)$	0	1	2	3	4	...	
		1	1	1	1	...	

(表4)

c. ($0, 0, 1, 0, 0, \dots$)差分表を作れ.

x	0	1	2	3	4	...	(注) $f(x) = \frac{x(x-1)}{2}$
$f(x)$	0	0	1	3	6	...	
		0	1	2	3	...	
		1	1	1	...		

(表5)

d. ($0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots$)差分表を作れ.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	(注)
$f(x)$	0	0	0	1	4	10	20	35	56	...	$f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$
		0	0	1	3	6	10	15	21	...	
		0	1	2	3	4	5	6	...		
		1	1	1	1	1	1	1	...		

(表6)

4. 差分表を使って多項式を求める.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	6	13	$*$	$*$
	3	7	$*$	$*$	
	4	4	4		
	0	0			

(表7)

この表は(3,3,4,0,0,...)差分表である. $f(x)$ は, レンガ多項式 $g_0(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ で表すことができる.

$$\begin{aligned}
 (3,3,4,0,0,\dots) &= 3 \times (1,0,0,0,0,\dots) + 3 \times (0,1,0,0,0,\dots) + 4 \times (0,0,1,0,0,\dots) \\
 &= 3 \times g_0(x) + 3 \times g_1(x) + 4 \times g_2(x) \\
 &= 3 + 3 \times x + 4 \times \frac{1}{2}x(x-1) \\
 &= 2x^2 + x + 3
 \end{aligned}$$

5. 和の表記

数列の和を差分表で求めることが出来る. そのために, の表記が必要である.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{n=1}^4 a_n$$

数列	1	2	3	4	5
和	1	3	6	10	15

(表8)

2列の最初に0を入れると,

n	0	1	2	3	4	5
和	0	1	3	6	10	15
	1	2	3	4	5	
	1	1	1	1		

(表9)

$$\begin{aligned}
 \sum_1^n r &= (0,1,1,0,0,\dots) \\
 &= (0,1,0,0,\dots) + (0,0,1,0,0,\dots) \\
 &= n + \frac{n(n-1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n \{a + (k-1)d\} = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

数列 和	0	a	$a + d$	$a + 2d$	$a + 3d$	$a + 4d$...
	0	a	$2a + d$	$3a + 3d$	$4a + 6d$	$5a + 10d$...
		a	$a+d$	$a + 2d$	$a + 3d$	$a + 4d$...
		d	d	d	d	d	...

(表 1 0)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \{a + (k-1)d\} &= (0, a, d, 0, 0, \dots) \\
 &= (0, a, 0, 0, \dots) + (0, 0, d, 0, 0, \dots) \\
 &= a \times (0, 1, 0, 0, \dots) + d \times (0, 0, 1, 0, 0, \dots) \\
 &= a \times n + d \times \frac{n(n-1)}{2} \\
 &= \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n ar^{i-1} = a \frac{(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

1	2	3	4	...	n
a	ar	ar^2	ar^3	...	ar^{n-1}
aR	aRr	aRr^2	aRr^3	...	aRr^{n-2}
aR^2	aR^2r	aR^2r^2	aR^2r^{n-2}
aR^3	aR^3r	aR^3r^2	aR^3r^{n-3}

ただし, $R = 1 - r$

(表 1 1)

$\frac{a}{R}$ ではじまる列を加えると,

0	1	2	3	n
$\frac{a}{R}$	$\frac{ar}{R}$	$\frac{ar^2}{R}$	$\frac{ar^3}{R}$	$\frac{ar^n}{R}$

$a \quad ar \quad ar^2 \quad ar^3 \quad \dots \quad ar^{n-1}$

$$\sum_{i=1}^n ar^{i-1} = \frac{ar^n}{R} - \frac{a}{R} = a \frac{(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

6. ラグランジュの多項式

x のいくつかの値に対して、多項式の値が分かっているとき、この多項式を求めることができる。ただし、 x の値は、等間隔とは限らない。(ラグランジュの方法)

a. 1次ラグランジュ多項式

1. 平面上の2点 $A(2, 3)$, $B(5, 9)$ を通る直線の方程式を求めよ。

1次, 2次, 3次の方程式を求めるとき、大半の人は、次のようにする。

$ax + b$, $ax^2 + bx + c$, $ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおいて、 a, b, c, d の値を求めようとする。だが、天才ラグランジュは次のように考える。

$f_1(2) = 0$, $f_1(5) = 9$ そして $f_2(2) = 3$, $f_2(5) = 0$ となる多項式 $f_1(x)$, $f_2(x)$ を求めると、 $f_1(2) + f_2(2) = 0 + 3 = 3$ そして $f_1(5) + f_2(5) = 9 + 0 = 9$ となるから $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ とおくことができる。 $f(x)$ は、1次の多項式で、 $f(2) = 3$, $f(5) = 9$ で条件を満足する。

2. $f_1(x)$ は、1次の多項式で、 $f_1(2) = 0$ だから $f_1(x) = p \times (x - 2)$

$f_1(5) = 9$ のとき p の値を求めて $f_1(x)$ を求めよ。

同様にして、 $f_2(x)$ を求める。上の求めた $f_1(x)$, $f_2(x)$ を用いて $f(x)$ が求まる。

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ &= -(x - 5) + 3(x - 2) \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

(注)ラグランジュの補間公式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} f(x_k)$$

ただし、 $l_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$

$$l_k(x) = (x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n) \quad (0 < k < n)$$

$$l_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

b. 2次ラグランジュ多項式

平面上の3点 $(1, 12)$, $(4, 9)$, $(5, 16)$ を通る2次多項式 $f(x)$ を求めるとする。 $f(x)$ は、次のようにかける。

$$f(x) = p \times (x - 4)(x - 5) + q \times (x - 1)(x - 5) + r \times (x - 1)(x - 4)$$

$$f(1) = 12p = 12 \quad p = 1$$

$$f(4) = 3q = 9 \quad q = 3$$

$$f(5) = 4r = 16 \quad r = 4$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } f(x) &= (x-4)(x-5) - (x-1)(x-5) + 4(x-1)(x-4) \\ &= 2x^2 - 11x + 21 \end{aligned}$$

c. 3次ラグランジュ多項式

平面上の4点 $(0, -8), (1, -6), (2, -8), (4, 24)$ を通る3次多項式 $f(x)$ を求めよ.

$$f(x) = p(x-1)(x-2)(x-4) + qx(x-2)(x-4) + rx(x-1)(x-4) + sx(x-1)(x-2)$$

$$f(0) = 8p = 8 \quad p = 1$$

$$f(1) = 3q = 6 \quad q = 2$$

$$f(2) = 4r = 8 \quad r = 2$$

$$f(4) = 24s = 24 \quad s = 1$$

よって,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2)(x-4) - 2x(x-2)(x-4) + 2x(x-1)(x-4) + x(x-1)(x-2) \\ &= 2x^3 - 8x^2 + 8x - 8 \end{aligned}$$

d. 次の表は, $f(x) = 2^x$ の差分表である.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
		1	2	4	8	16	32	64	128
			1	2	4	8	16	32	64
				1	2	4	8	16	32

(表12)

この表から, 次のことが分かる.

$$2^x = g_0(x) + g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) + \dots$$

次の表は, $g(x) = a^x$ ($a > 0, k = (a - 1)$) の差分表である.

x	0	1	2	3	4	5	6
a^x	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
		k	ka	ka^2	ka^3	ka^4	ka^5
		k^2	k^2a	k^3a^2	k^2a^3	k^2a^4	
		k^3	k^3a	k^3a^2	k^3a^3		

(表 1 3)

$$\begin{aligned}
 (1+k)^x &= (1, k, k^2, k^3, \dots) \\
 &= (1, 0, 0, \dots) + k(0, 1, 0, 0, \dots) + k^2(0, 0, 1, 0, 0, \dots) \\
 &\quad + k^3(0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) + \dots \\
 &= g_0(x) + kg_1(x) + k^2g_2(x) + k^3g_3(x) + \dots
 \end{aligned}$$

$a = 1 + k$ とおくと,

$$(1+k)^2 = 1 + \frac{x}{1!}k + \frac{x(x-1)}{2!}k^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}k^3 + \dots$$

$k = 1$ とおくと,

$$2^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \dots$$

を比較して,

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = \frac{x}{1!}, \quad g_2(x) = \frac{x(x-1)}{2!}, \quad g_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}, \quad \dots$$

7. 関数の多項式による近似 (この項目は、選択になっている.)

a. $\cos x$ の近似式

1. $y = \cos x$ と3点 $(-1/2, 0), (0, 1), (1/2, 0)$ を通る2次多項式のグラフをグラフィックス関数電卓(以下、電卓と略記)上で比較すること。

2. 上記3点とさらに2点 $(-1, 0), (1, 0)$ を通る4次多項式を求めよ。電卓上で2次と4次の多項式はどちらがよい近似式といえるか調べてみよ。

(注)この教科書では、次の3種のグラフィックス関数電卓が紹介されている。

1. Casio fx 7700G
2. Sharp EX 9200/9300
3. Texas TL 81/82

我が国では、工業高等専門学校や工業高等学校以外ではグラフィックス関数電卓は、教室では使われていないのが現状である。

b. $\sin x$ の近似式

1. $x = 0, 30, 90$ のとき, $y = \sin x^\circ$ のグラフ上の3点を求めよ.
2. この3点を通る2次多項式 $q(x)$ を求めよ. 電卓上で $y = \sin x^\circ$ と $y = q(x)$ の最大差分を求めよ. ただし, $0 \leq x \leq 90$ とする.

c. 一点における近似

$x = 0$ のとき, グラフ上の点で関数に近似できる多項式を求めたい.

1. $y = \cos x, y = 1 - \frac{x}{2!}, y = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^4}{4!}, y = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$

のグラフを電卓上に描いてみよ. (同軸上で)

2. $y = \sin x, y = x, y = x - \frac{x^3}{3!}, y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

のグラフを電卓上に描いてみよ. (同軸上で)

(注)この近似をマクローリン近似という.

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

d. 最小二乗法

e. ミニマックス法

(注) d. e. はごく簡単に触れられている.

参考図書

1. *Nuffield Advanced Mathematics Book4, Longman, 1994*
2. 分数ができない大学生 21世紀の日本が危ない 岡部 恒治他編 東洋経済新報社
3. *Advanced Engineering Mathematics Edwig Kreyszig John Wiley & Sons
New York 1983*