

方程式の解と置換について（平成20年）

我が国では中学3年で二次方程式の解の公式を教わり、大学初年次に三次と四次方程式の解の公式を学びます。そして、大学三年次にガロア理論を学び、方程式論を一応理解することになっています。だが、どの段階も未消化のままに終わっているのが現状のようです。そこで、日頃から考えている方程式論指導の検討資料としたいと思います。

1. 解の公式

解の公式は次の因数分解を用いて求められる。

$$1) \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$2) \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$3) \quad a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) - 8abcd \\ = -(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)$$

(1) 二次方程式 $x^2 - bx + c = 0$ について

$$x = y + \frac{b}{2} \quad \text{とおく} \quad \dots\dots\dots(\text{A})$$

$$y^2 - p^2 = 0 \quad (\text{補助方程式}) \quad \text{ただし} \quad p = \frac{\sqrt{D}}{2}, \quad D = b^2 - 4c$$

1) より

$$y = \pm p = \pm \frac{\sqrt{D}}{2}$$

(A) より

$$x = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2}$$

(2) 三次方程式 $x^3 - bx^2 + cx - d = 0$ について

$$x = y + \frac{b}{3} \quad \text{とおく} \quad \dots\dots\dots(\text{B})$$

$$y^2 + py - q = 0 \quad \text{ただし,} \quad p = c - \frac{b^2}{3}, \quad q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}$$

$$p = -3uv, \quad q = u^3 + v^3 \quad \text{とおくと}$$

$$u^3 + v^3 = q, \quad u^3v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$$

u^3, v^3 は補助方程式 $t^2 - qt + (-\frac{p}{3})^3 = 0$ の根

$$t = \frac{q}{2} \pm \sqrt{R} \quad \text{ただし} \quad R = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$$

$$\therefore u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{R}}, \quad v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{R}}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ より } y^3 + u^3 + v^3 - 3uvy &= (y + u + v)(y^2 + u^2 + v^2 - yu - yv - uv) \\ &= (y + u + v)(y + u\omega + v\omega^2)(y + v\omega + u\omega^2) \end{aligned}$$

$$\therefore y = -u - v, \quad -u\omega - v\omega^2, \quad -v\omega - u\omega^2$$

(B) より

$$x = \frac{b}{3} - u - v, \quad \frac{b}{3} - u\omega - v\omega^2, \quad \frac{b}{3} - v\omega - u\omega^2$$

注 ω : 1の虚の立方根, $\omega^2 = 1, 1 + \omega + \omega^2 = 0$

(3) 四次方程式 $x^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e = 0$ について

$$x = y + \frac{b}{4} \quad \text{とおく} \quad \dots\dots\dots(C)$$

$$y^4 + py^2 - qy + r = 0$$

$$\text{ただし } p = c - \frac{3b^2}{8}, \quad q = d - \frac{bc}{2} + \frac{b^3}{8}, \quad r = e - \frac{bd}{4} + \frac{b^2c}{16} - \frac{3b^4}{256}$$

$$p = -2(u^2 + v^2 + w^2),$$

$$q = 8uvw, \quad r = u^4 + v^4 + w^4 - 2(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) \quad \text{とおく} \quad \dots\dots\dots(D)$$

元の方程式は, 3)を用いて因数分解できる.

$$\begin{aligned} y^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)y - 8uvw + \{ u^4 + v^4 + w^4 - 2(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) \} \\ = -(-y + u + v + w)(y - u + v + w)(y + u - v + w)(y + u + v - w) \end{aligned}$$

$$(D) \text{ より } u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2}$$

$$u^2v^2w^2 = (\frac{q}{8})^2$$

$$u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = \frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}$$

u^2, v^1, w^2 は 三次方程式 $(t-u^2)(t-v^2)(t-w^2) = 0$ の解だから

$$t^3 - (u^2 + v^2 + w^2)t^2 + (u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)t - u^2v^2w^2 = 0$$

$$\therefore t^3 + \frac{p}{2}t^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right)t - \left(\frac{q}{8}\right)^2 = 0 \quad (\text{補助方程式})$$

(2) に帰着する.

注 代数方程式の根は, 代数演算を用いて方程式の係数から求まる. また, 係数は根の対称式だから, 根の間の置換で変わらない. Galois 拡大が同型写像から始めるのはそのためである.

2. 補助方程式の解と置換

方程式の根の間の置換で, 補助方程式の根は変わらない.

(1) 2次方程式は, 次の補助方程式に変形できた.

$$y^2 - p^2 = 0 \quad \text{ただし} \quad p = \frac{\sqrt{D}}{2}$$

元の方程式の解 x_1, x_2 をとすると

$$D = (x_1 - x_2)^2 \quad \text{だから}$$

$$y^2 = \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2), \quad \frac{1}{2}(x_2 - x_1),$$

よって, 補助方程式の根 x_1, x_2 はの置換で変わらない.

(2) 3次方程式は, 次の補助方程式に変形できた.

$$t^2 - qt + \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

$$\text{ただし} \quad p = c - \frac{b^2}{3}, \quad q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}$$

元の方程式の根を x_1, x_2, x_3 とし, 補助方程式の根を u, v とすると

$$x_1 = \frac{b}{3a} - u - v, \quad x_2 = \frac{b}{3a} - u\omega - v\omega^2, \quad x_3 = \frac{b}{3a} - u\omega^2 - v\omega$$

$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$ だから

$$u = -\frac{1}{3}(x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2), \quad v = -\frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)$$

$$u\omega = -\frac{1}{3}(x_2 + \omega x_1 + \omega^2 x_3), \quad v\omega = -\frac{1}{3}(x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2)$$

$$u\omega^2 = -\frac{1}{3}(x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1), \quad u\omega^2 = -\frac{1}{3}(x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1)$$

よって、補助方程式は x_1, x_2, x_3 の整式となり、1つの根 $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ はで根 x_1, x_2, x_3 の間の置換で他の根が得られることが分かる。

(3) 4次方程式は、 u^2, v^2, w^2 を根にもつ次の補助方程式に変形される。

$$t^2 + \frac{p}{2}t^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right)t - \left(\frac{q}{8}\right)^2 = 0$$

元の方程式の根を x_1, x_2, x_3, x_4 とし、補助方程式の根 t_1, t_2, t_3 をとすると

$$u = \pm\sqrt{t_1}, \quad v = \pm\sqrt{t_2}, \quad w = \pm\sqrt{t_3},$$

$UVW = -\frac{q}{8}$ より u, v, w のうち二つが決まると他は一意に決まるから、

根 u, v, w の一組を $\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, \pm\sqrt{t_3}$ とすると、

$$y_1 = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}, \quad y_2 = \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3},$$

$$y_3 = -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}, \quad y_4 = -\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3},$$

$$\therefore y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 4\sqrt{t_1}, \quad y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 4\sqrt{t_2},$$

$$y_1 - y_2 - y_3 + y_4 = 4\sqrt{t_3}$$

$$\therefore u^2 = \frac{1}{16}(y_1 + y_2 - y_3 - y_4)^2, \quad v^2 = \frac{1}{16}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)^2,$$

$$w^2 = \frac{1}{16}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4)^2$$

$$y = x + \frac{b}{4a} \quad \text{より}$$

$$\therefore u^2 = \frac{1}{16}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2, \quad v^2 = \frac{1}{16}(x_1 + x_2 + x_3 - x_4)^2,$$

$$w^2 = \frac{1}{16}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2$$

補助方程式の根は、元の方程式の根 x_1, x_2, x_3, x_4 の整式であり、その一つは $x_1 + \mu x_2 + \mu x_3 + \mu x_4$ ($\mu = -1$) で、他の根はの間の置換で求まる。

方程式の係数体は、根の対称式で、根の置換で変わらない。根 x_n の間の置換が作る群を考察する。

3. 対称群の構成

根 x_n を n と置き、 n 個の文字置換で考える。ただし、互換を $(m\ n)$ 、巡回置換を $(k\ l\ m\ n)$ と記す。

$$S_2 = 1, (1\ 2)$$

$$S_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & (1\ 3) & (2\ 3) \\ \hline (1\ 2) & (1\ 2\ 3) & (1\ 3\ 2) \\ \hline \end{array}$$

$$S_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & (1\ 4) & (2\ 4) & (3\ 4) \\ \hline (1\ 2) & (1\ 2\ 4) & (1\ 4\ 2) & (1\ 2)(3\ 4) \\ \hline (1\ 3) & (1\ 3\ 4) & (1\ 3)(2\ 4) & (1\ 4\ 3) \\ \hline (2\ 3) & (1\ 4)(2\ 3) & (2\ 3\ 4) & (2\ 4\ 3) \\ \hline (1\ 2\ 3) & (1\ 2\ 3\ 4) & (1\ 4\ 2\ 3) & (1\ 2\ 4\ 3) \\ \hline (1\ 3\ 2) & (1\ 3\ 2\ 4) & (1\ 3\ 4\ 2) & (1\ 4\ 3\ 2) \\ \hline \end{array}$$

$$S_5 = S_4 + S_4(1\ 5) + S_4(2\ 5) + S_4(3\ 5) + S_4(4\ 5)$$

一般に、次のようになる。

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-1}t_1 + S_{n-1}t_2 + \cdots + S_{n-1}t_{n-1}$$

$$\text{ただし } t_1 = (1\ n), t_2 = (2\ n), \cdots, t_{n-1} = (n-1\ n)$$

4. 置換群の正規部分群

1) すべての置換は, 互換 $(1\ n)$ で表される.

(1) 巡回置換

$$(i\ j\ k) = (1\ i)(1\ j)(1\ k)$$

(2) 互換

$$(i\ j) = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$$

2) 置換群 G は, $x_1 \rightarrow x_n$ の互換 $(1\ n)$ で表される.

$H : 1, s_2, s_3, \dots, s_r$ とするとき, H は 1 を含むから

$$H : x_1 \rightarrow x_1$$

$t_2 = (1\ 2)$ とすると

$$Ht_2 : t_2, s_2t_2, \dots, s_rt_2 : x_1 \rightarrow x_2$$

.....

$t_n = (1\ n)$ とすると

$$Ht_n : t_n, s_2t_n, \dots, s_rt_n : x_1 \rightarrow x_n$$

$$G = H + Ht_2 + Ht_3 + \dots + Ht_n$$

3) H (固定群)のとき $t_i^{-1}Ht_i$ は不動置換である.

$$\therefore t^{-1} \text{ は } x_i \rightarrow x_1$$

$$H \text{ は } x_1 \rightarrow x_1$$

$$t \text{ は } x_1 \rightarrow x_i$$

$$\therefore t_i^{-1} H t_i \text{ は } x_i \rightarrow x_i$$

注 $(x_1\ x_2)$ を $(i\ j)$ と記すことがある.

5. 交代群

$$A_2 = 1$$

$$A_3 = 1, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)$$

$$A_4 =$$

1	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)
(1 2 3)	(2 3 4)	(1 4 2)	(1 3 4)
(1 3 2)	(1 4 3)	(2 3 4)	(1 2 4)

$$A_5 = A_4 + A_4 (1\ 2)(3\ 4\ 5) + A_4 (1\ 3)(2\ 4\ 5) + A_4 (1\ 4)(2\ 3\ 5) + A_4 (1\ 5)(2\ 3\ 4)$$

注 (1 2)(3 4 5), (1 3)(2 4 5), (1 4)(2 3 5), (1 5)(2 3 4) : 偶置換

1) 交代群は(i j k)の巡回群により生成される.

$$\because (i\ j)(l\ k) = (i\ k\ j), \quad (i\ j)(k\ l) = (i\ j)(j\ k)(j\ k)(k\ l)(k\ l) = (i\ k\ j)(j\ l\ k)$$

2) S_n の交換子部分群は, A_n である.

$$\because (i\ j\ k) = (i\ j\ m)(i\ k\ j)(m\ j\ i)(l\ k\ i) = (i\ j\ ml)(i\ k\ l)(i\ j\ m)^{-1}(i\ k\ j)^{-1}$$

3) $(i\ j\ k)^{-1} = (k\ j\ i)$

6. 組成列

$$S_2 \triangleright E \quad \text{ただし } E = \{1\}$$

$$[S_2 : E] = 2 \text{ (素数)}$$

$$S_3 \triangleright A_3 \triangleright E$$

$$[S_3 : A_3] = 2 \text{ (素数)}, \quad [A_3 : E] = 3 \text{ (素数)}$$

$$S_4 \triangleright A_4 \triangleright V_4 \triangleright K \triangleright E$$

$$\text{ただし } V_4 = \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

$$K = \{1, (1\ 3)(2\ 4)\}$$

$$[S_4 : A_4] = [A_4 : V_4] = [V_4 : K] = [K : E] = 2 \text{ (素数)}$$

$$S_5 \triangleright A_5 \triangleright E$$

$$[S_5 : A_5] = 20 \text{ (非素数)}, \quad [A_5 : E] = 60 \text{ (非素数)}$$

注 V_4 : クラインの4元群(Vierengruppe)

5個の根をもつ方程式は, 因子群の位数は素数でないので, 方程式は既約方程式に表せないことが分かる.

引用文献

1. Edgar Dehn, Algebraic Equations — An Introduction to the Theories of Lagrange and Galois, Dover, 1960