

## 方程式の解と置換について（平成20年）

はじめに

我が国では，中学3年で二次方程式の解の公式を教わり，大学初年次に三次と四次方程式の解の公式を学びます．そして，大学三年次にガロア理論を学び，方程式論を一応理解することになっています．だが，どの段階も未消化のままに終わっているのが現状のようです．そこで，日頃から考えている方程式論を足早に展開して，私自身の今後の検討資料としたいと思います．

### 1. 解の公式

解の公式は，次の因数分解を用いて求められる．

$$1) \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$2) \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

$$3) \quad a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) - 8abcd$$

$$= -(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)$$

(1) 二次方程式  $x^2 - bx + c = 0$  について，

$$x = y + \frac{b}{2} \text{ とおく } \dots\dots\dots(\text{A})$$

$$y^2 - p^2 = 0 \quad (\text{補助方程式}) \quad \text{ただし, } p = \frac{\sqrt{D}}{2}, \quad D = b^2 - 4c$$

1) より

$$y = \pm p = \pm \frac{\sqrt{D}}{2}$$

(A) より

$$x = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2}$$

(2) 三次方程式  $x^3 - bx^2 + cx - d = 0$  について

$$x = y + \frac{b}{3} \text{ とおく } \dots\dots\dots(\text{B})$$

$$y^3 + py - q = 0 \quad \text{ただし, } p = c - \frac{b^2}{3}, \quad q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}$$

$$p = -3uv, \quad q = u^3 + v^3 \text{ とおくと}$$

$$u^3 + v^3 = q, \quad u^3v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$$

$u^3, v^3$  は  $t^2 - qt + (-\frac{p}{3})^3 = 0$  (補助方程式) の解

$$t = \frac{q}{2} \pm \sqrt{R} \quad \text{ただし, } R = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$$

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{R}}, \quad v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{R}}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ より } y^3 + u^3 + v^3 - 3uvy &= (y + u + v)(y^2 + u^2 + v^2 - yu - yv - uv) \\ &= (y + u + v)(y + uy + vy^2)(y + vy + uy^2) \\ y &= -u - v, -uy - vy^2, -vy - uy^2 \end{aligned}$$

(B) より

$$x = \frac{b}{3} - u - v, \quad \frac{b}{3} - uy - vy^2, \quad \frac{b}{3} - vy - uy^2$$

注  $y$  : 1の虚の立方根,  $y^3 = 1, 1 + y + y^2 = 0$

(3) 四次方程式  $x^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e = 0$  について

$$x = y + \frac{b}{4} \text{ とおく } \dots\dots\dots(C)$$

$$y^4 + py^2 - qy + r = 0$$

$$\text{ただし, } p = c - \frac{3b^2}{8}, \quad q = d - \frac{bc}{2} + \frac{b^3}{8}, \quad r = e - \frac{bd}{4} + \frac{b^2c}{16} - \frac{3b^4}{256}$$

$$p = -2(u^2 + v^2 + w^2),$$

$$q = 8uvw, \quad r = u^4 + v^4 + w^4 - 2(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) \text{ とおくと } \dots\dots(D)$$

元の方程式は, 3)を用いて因数分解できる.

$$y^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)y - 8uvw + \{u^4 + v^4 + w^4 - 2(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)\}$$

$$= -(-y + u + v + w)(y - u + v + w)(y + u - v + w)(y + u + v - w)$$

$$(D) \text{ より } u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2}$$

$$u^2v^2w^2 = (\frac{q}{8})^2$$

$$u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = \frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}$$

$u^2, v^2, w^2$  は、三次方程式  $(t - u^2)(t - v^2)(t - w^2) = 0$  の解だから

$$t^3 - (u^2 + v^2 + w^2)t^2 + (u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)t - u^2v^2w^2 = 0$$

$$t^3 + \frac{p}{2}t^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right)t - \left(\frac{q}{8}\right)^2 = 0 \quad (\text{補助方程式})$$

(2) に帰着する.

注 代数方程式の根は、代数演算を用いて方程式の係数から求まる. また、係数は根の対称式だから、根の間の置換で変わらない. Galois 拡大が同型写像から始めるのはそのためである.

## 2. 補助方程式の解と置換

方程式の解の間の置換で、補助方程式の解は変わらない.

(a) 2次方程式  $x^2 + px - q = 0$  は、次の補助方程式に変形できる.

$$y^2 - p^2 = 0 \quad \text{ただし、} p = \frac{\sqrt{D}}{2}$$

元の方程式の解を  $x_1, x_2$  とすると

$$D = (x_1 - x_2)^2 \quad \text{だから}$$

$$y^2 = \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2$$

$$y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2), \quad \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

よって、補助方程式の解は  $x_1, x_2$  の置換で変わらない.

(2) 3次方程式は、次の補助方程式に変形できる.

$$t^2 - qt + \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

$$\text{ただし、} p = c - \frac{b^2}{3}, \quad q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}$$

元の方程式の解を  $x_1, x_2, x_3$  とし、補助方程式の解を  $u, v$  とすると

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + u + v, \quad x_2 = -\frac{b}{3a} + uy + vy^2, \quad x_3 = -\frac{b}{3a} + uy^2 + vy$$

$$y^3 = 1, \quad y^2 + y + 1 = 0 \quad \text{だから}$$

$$u = \frac{1}{3}(x_1 + yx_3 + y^2x_2), \quad v = \frac{1}{3}(x_1 + yx_2 + y^2x_3)$$

$$uy = \frac{1}{3}(x_2 + yx_1 + y^2x_3), \quad vy = \frac{1}{3}(x_3 + yx_1 + y^2x_2)$$

$$uy^2 = \frac{1}{3}(x_3 + yx_2 + y^2x_1), \quad vy^2 = \frac{1}{3}(x_2 + yx_3 + y^2x_1)$$

よって、補助方程式は  $x_1, x_2, x_3$  の整式となり、1つの解は  $x_1 + yx_2 + y^2x_3$  で解の間の置換  $x_1, x_2, x_3$  で他の解が得られることが分かる。

(3) 4次方程式は、 $u^2, v^2, w^2$  を解にもつ次の補助方程式に変形される。

$$t^3 + \frac{p}{2}t^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right)t - \left(\frac{q}{8}\right)^2 = 0$$

元の方程式の解を  $x_1, x_2, x_3, x_4$  とし、補助方程式の解を  $t_1, t_2, t_3$  とすると

$$u = \pm\sqrt{t_1}, \quad v = \pm\sqrt{t_2}, \quad w = \pm\sqrt{t_3}$$

$uvw = -\frac{q}{8}$  より、 $u, v, w$  のうち二つが決まると他は一意に決まるから、

解  $u, v, w$  の一組を  $\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, \sqrt{t_3}$  とすると、

$$y_1 = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}, \quad y_2 = \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3},$$

$$y_3 = -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}, \quad y_4 = -\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}$$

$$y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 4\sqrt{t_1}, \quad y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 4\sqrt{t_2},$$

$$y_1 - y_2 - y_3 + y_4 = 4\sqrt{t_3}$$

$$u^2 = \frac{1}{16}(y_1 + y_2 - y_3 - y_4)^2, \quad v^2 = \frac{1}{16}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)^2,$$

$$w^2 = \frac{1}{16}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4)^2$$

$$y = x + \frac{b}{4a} \quad \text{より、}$$

$$u^2 = \frac{1}{16}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2, \quad v^2 = \frac{1}{16}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2,$$

$$w^2 = \frac{1}{16}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2$$

補助方程式の解は、元の方程式  $x_1, x_2, x_3, x_4$  の解の整式であり、その一つは  $x_1 + 1x_2 + 1^2x_3 + 1^3x_4$  ( $1 = -1$ ) で、他の解は  $x_1, x_2, x_3, x_4$  の間の置換で求まる。

### 3. 対称群の構成

$$S_2 = 1, (1\ 2)$$

$$S_3 =$$

1	(1 3)	(2 3)
(1 2)	(1 2 3)	(1 3 2)

$$S_4 =$$

1	(1 4)	(2 4)	(3 4)
(1 2)	(1 2 4)	(1 4 2)	(1 2)(3 4)
(1 3)	(1 3 4)	(1 3)(2 4)	(1 4 3)
(2 3)	(1 4)(2 3)	(2 3 4)	(2 4 3)
(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 4 2 3)	(1 2 4 3)
(1 3 2)	(1 3 2 4)	(1 3 4 2)	(1 4 3 2)

$$S_5 = S_4 + S_4 (1\ 5) + S_4 (2\ 5) + S_4 (3\ 5) + S_4 (4\ 5)$$

一般に，次のようになる．

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} t_1 + S_{n-3} t_2 + \dots + S_{n-1} t_{n-1}$$

$$\text{ただし, } t_1 = (1\ n), t_2 = (2\ n), \dots, t_{n-1} = (n-1\ n)$$

### 4. 置換群の正規部分群

1) すべての置換は，互換(1 n)で表される．

(1) 巡回群

$$(ijk) = (1\ i)(1\ j)(1\ k)$$

(2) 互換

$$(ij) = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$$

2) 置換群 G は， $x_1, \dots, x_n$  の互換(1 n)で表される．

H : 1,  $s_2, s_3, \dots, s_r$  とするとき，

H は 1 を含むから H :  $x_1, \dots, x_1$

$t_2 = (1\ 2)$  とすると

H $t_2$  :  $t_2, s_2t_2, \dots, s_r t_2 : x_1, \dots, x_2$

.....

$t_n = (1\ n)$  とすると

H $t_n$  :  $t_n, s_2t_n, \dots, s_r t_n : x_1, \dots, x_n$

$$G = H + Ht_2 + Ht_3 + \dots + Ht_n$$

3)  $H$ (固定群) のとき  $t_i^{-1}Ht_i$  は不動置換である .

$$t_i^{-1} \text{ は } x_i \quad x_1$$

$$H \text{ は } x_1 \quad x_1$$

$$t_i \text{ は } x_1 \quad x_i$$

$$t_i^{-1} H t_i \text{ は } x_i \quad x_i$$

注  $(x_i x_j)$  を  $(i j)$  と記すことがある。

### 5. 交代群

$$A_2 = 1$$

$$A_3 = \{1, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

$$A_4 =$$

1	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)
(1 2 3)	(2 3 4)	(1 4 2)	(1 3 4)
(1 3 2)	(1 4 3)	(2 3 4)	(1 2 4)

$$A_5 = A_4 + A_4 (1\ 2) (3\ 4\ 5) + A_4 (1\ 3)(2\ 4\ 5) + A_4 (1\ 4)(2\ 3\ 5) + A_4 (1\ 5)(2\ 3\ 4)$$

注 (1 2) (3 4 5), (1 3)(2 4 5), (1 4)(2 3 5), (1 5)(2 3 4) : 偶置換

1) 交代群は  $(i j k)$  の巡回群により生成される .

$$(i\ j)(j\ k) = (i\ k\ j), \quad (i\ j)(k\ l) = (i\ j)(j\ k)(j\ k)(k\ l) = (i\ k\ j)(j\ l\ k)$$

2)  $S_n$  の交換子部分群は,  $A_n$  である .

$$(i\ j\ k) = (i\ j\ m)(i\ k\ l)(m\ j\ i)(l\ k\ i)$$

$$= (i\ j\ m) (i\ k\ l)(i\ j\ m)^{-1} (i\ k\ l)^{-1}$$

3)  $(i\ j\ k)^{-1} = (k\ j\ i)$

### 6. 組成列

$$S_2 \triangleright E \quad \text{ただし, } E = \{1\}$$

$$[S_2 : E] = 2 \text{ (素数)}$$

$$S_3 \triangleright A_3 \triangleright E$$

$$[S_3 : A_3] = 2 \text{ (素数)}, \quad [A_3 : E] = 3 \text{ (素数)}$$

$$S_4 \triangleright A_4 \triangleright V_4 \triangleright K \triangleright E$$

$$V_4 = \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

$$K = \{1, (1\ 3)(2\ 4)\}$$

$$[S_4 : A_4] = [A_4 : V_4] = [V_4 : K] = [K : E] = 2 \text{ (素数)}$$

$$S_5 \triangleright A_5 \triangleright E$$

$$[S_5 : A_5] = 20, [A_5 : E] = 60 \text{ (非素数)}$$

注  $V_4$ : クラインの4元群 (*Vierengruppe*)

## 7. 対称群と交代群

1)  $[S_n : A_n] = 2$

任意の奇置換  $s \in S_n$  とすると,  $sA_n$  : 奇置換

$$S_n = A_n + sA_n$$

2)  $A_n$  は  $S_n$  の正規部分群である.

$H = E$  を  $A_n$  の正規部分群とする.

$$(1\ 2\ 3) \in H \text{ のとき 次の } s \text{ について } s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ i & j & k & \dots \end{pmatrix} \in S_n$$

$$s^{-1} (1\ 2\ 3) s = (i\ j\ k)$$

$$(i\ j\ k) \in H$$

$$H = A_n$$

3)  $n \geq 5$  のとき 交代群  $A_n$  は単純群である.

$s \in E \in H$  とする.

$s$  は  $(1\ 2\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$  のいずれかである.

(i)  $s = (1\ 2\ 3)$  のとき 2) より  $H = A_n$

$s = (1\ 2)(3\ 4), (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$  のとき  $t = (3\ 4\ 5)$  として矛盾を示す.

(ii)  $s = (1\ 2)(3\ 4)$  のとき  $s' = t^{-1} s t = (1\ 2)(4\ 5)$

(iii)  $s = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$  のとき  $s' = t^{-1} s t = (1\ 2\ 4)$

(ii) (iii) のとき  $s = s'$

$$s' s^{-1} = 1$$

文字  $k (>5)$  が  $s$  で不変なら  $t$  でも不変

$$k t = k$$

$$k s s^{-1} = k$$

ところが (ii) (iii) の場合  $1 s s^{-1} = 1$

だから,  $s' s^{-1}$  で不変な文字の個数は  $s$  のそれより大きい.

$s' s^{-1} \in H$  だから矛盾

$A_n$  は単純群である.

## 8. 最小多項式

定義  $a$  を根とする  $F$  係数の最小次数の多項式で, 特にモニックなものをいう.

## 9. 単純拡大体

### 1) 定義

拡大体  $L/K$  があるとき,  $L$  の部分集合  $S$  とすると,  $K$  と  $S$  を含む  $L$  の最小部分体を  $K$  に  $S$  を添加した体といい  $K(S)$  と記す.

### 2) 定理

数体  $F$  に有限個の代数的数を  $a, b, c, \dots, d$  添加した体  $F(a, b, c, \dots, d) = F(t)$  は単純拡大である.

$$F(a, b, c, \dots, d) = F(t)$$

$F(a, b) = F(t)$  を示すとよい.

$f(x)$ :  $a$  の最小多項式

$g(x)$ :  $b$  の最小多項式

$f(x)$  の根を  $a = a_1, a_2, \dots, a_i$

$g(x)$  の根を  $b = b_1, b_2, \dots, b_j$

$\frac{a_i - a}{b - b_j}$   $c$  とする.

$$t = a + cx \quad \text{とおく}$$

$f_1(x) = f(t - cx)$  とおくと,  $f_1(x) \in F(t)[x]$

$f_1(b) = f(t - cb) = f(a) = 0$

$f_1(b_j) = f(t - cb_j) \quad f(a_i) = 0$



$$\begin{aligned}
 t - cb_j &= t - cb + c(b - b_j) \\
 &= a + c(b - b_j) \\
 a_i &\quad \frac{a_i - a}{b - b_j} \quad c \\
 f_i(b_j) &= 0
 \end{aligned}$$

$f_1(x)$  と  $g(x)$  は、ただ一つの共通根  $b$  をもつから  $f_1(x) = x - b$   
 $b \in F(t)$

同様にして、

$g_1(x)$  と  $f(x)$  は、ただ一つの共通根  $a$  をもつから  $g_1(x) = x - a$

$$\begin{aligned}
 a &\in F(t) \\
 F(a, b) &= F(t) \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

また  $t = a + cb \in F(a, b)$

$$F(t) = F(a, b) \dots\dots\dots(2)$$

(1) (2) より  $F(a, b) = F(t)$

例  $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = Q(\sqrt{2} + \sqrt{3})$   $Q$ : 有理数体

例 有理整数体  $Q$  の自己同型写像は、恒等写像だけである。

定理 (同型延長定理)

$F \subset E$  のとき,  $s$  を  $F$  の同型写像とすると,  $s$  は  $E$  の同型写像に延長できる。  
 また,  $[E : F] = n$  のとき,  $s$  の延長は  $n$  個ある。

$$\begin{aligned}
 E &\xrightarrow{s} s(E) \\
 F &\xrightarrow{s} s(F)
 \end{aligned}$$

$E$  が  $F$  の単純拡大体のとき示すとよい。

(i)  $f(x)$  が  $F$  上規約なら  $s(f(x)) \in s(F)$  は上規約である。  
 $s(f(x))$  が規約でないとする。

$$s(f(x)) = g(x)h(x)$$

$s$  が同型写像で,  $s^{-1}$  が存在するから,

$$s^{-1} s(f(x)) = s^{-1}(g(x)) s^{-1} (h(x))$$

$$f(x) = s^{-1}(g(x)) s^{-1} (h(x))$$

$f(x)$  が規約であることに矛盾する .

$s(f(x))$ : 規約

(ii)  $s$  は四則演算  $\circ$  を保存する .

$k, l \in E$  とすると ,  $E = F(\mathbf{h})$ ,  $[E : F] = n$  だから ,

$$k = f_0 + f_1 \mathbf{h} + \dots + f_{n-1} \mathbf{h}^{n-1} \quad f_i \in F$$

$$l = g_0 + g_1 \mathbf{h} + \dots + g_{n-1} \mathbf{h}^{n-1} \quad g_i \in F$$

$$s(k) = s(f_0) + s(f_1)s(\mathbf{h}) + \dots + s(f_{n-1})s(\mathbf{h})^{n-1}$$

$$= s(f_0) + s(f_1)s(\mathbf{h}) + \dots + s(f_{n-1})s(\mathbf{h})^{n-1}$$

同様にして

$$s(l) = s(g_0) + s(g_1)s(\mathbf{h}) + \dots + s(g_{n-1})s(\mathbf{h})^{n-1}$$

$$s(k \circ l) = s(f_0 \circ g_0) + s(f_1 \circ g_1)s(\mathbf{h}) + \dots + s(f_{n-1} \circ g_{n-1})s(\mathbf{h})^{n-1}$$

$$= s(k) \circ s(l)$$

(iii)  $s$  は  $n$  個ある .

$E$  は  $F$  の単純拡大体だから ,  $E = F(\mathbf{h})$

最小多項式を次のように置く  $f(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^n + a_1 \mathbf{h} + \dots + a_n \quad a_i \in F$

$$f(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^n + a_1 \mathbf{h} + \dots + a_n = 0$$

$$s(f(\mathbf{h})) = s(\mathbf{h})^n + s(a_1) s(\mathbf{h})^{n-1} + \dots + s(a_n) = 0$$

$s(\mathbf{h})$  は上式の根で  $n$  個ある .

定 理 (正規性定理)

拡大体  $F \subset B \subset E$  で  $B/F$  は  $f(x) \in F(x)$  の分解体で ,  $E/F$  は  $g(x) \in F(x)$  の分解体とする .

$Gal(E/B)$  は  $Gal(E/F)$  の正規部分群で ,

$$Gal(E/F) / Gal(E/B) \cong Gal(B/F)$$

$$E \dots\dots\dots > G(E) = Gal(B/F)$$

$$B \dots\dots\dots > G(B) = Gal(E/B)$$

$$F \dots\dots\dots > G = Gal(E/F)$$

$s \in G$  のとき  $s G s^{-1} = G(B)$  を示す .

$B$  は  $F$  のガロア拡大だから

$s g s^{-1} \in sG(B)s^{-1}$  をとり,  $x \in B$  とすると,

$$s g s^{-1}(c) = s g s^{-1}(c)$$

$$= s s^{-1}(c)$$

$$= c$$

$$s G(B) s^{-1} \subseteq G(B)$$

$\text{Gal}(E/B)$  は  $\text{Gal}(E/F)$  の正規部分群)

第一同型定理より

$$\text{Gal}(E/F) / \text{Gal}(E/B) \cong \text{Gal}(B/F)$$

定理  $f(x)$  の  $F$  上ガロア群  $G$  は,  $n$  次対称群  $S_n$  である. また,  $n \geq 5$  のとき,  $S_n$  は可解群ではない.

(i)  $f(x)$  の分解体は  $K = F(a_1, a_2, \dots, a_n)$  で  $a_k$  は  $f(x)$  の根である.

$S_n$  は  $K$  の  $F$  上ガロア群  $G$  の部分群だから

$$[K:F] = G \text{ の位数} = S_n \text{ の位数} = n! \dots$$

$$F \subset F(a_1) \subset F(a_1, a_2) \subset \dots \subset F(a_1, a_2, \dots, a_n) = K$$

$$[K:F] = [F(a_1):F] \dots [K:F(a_1, a_2, \dots, a_n)] = n! \dots$$

より,  $G = S_n$

$$S_n \triangleright A_n \triangleright E$$

(ii)  $n \geq 5$  のとき

$A_n$  の正規部分群  $N$  について,  $A_n/N$  が巡回群 (可換) なら

交代群  $A_n$  は  $(i j k)$  から生成され,  $N$  は交換子すべてを含むから

$N = A_n$  となり, 剰余類群が巡回群となる系列は不可能

よって,  $n \geq 5$  のとき,  $S_n$  は可解群ではない.

注 巡回群は, 可換で位数は素数である.

#### 引用文献

1. Joseph Rotman, *Galois Theory*, Springer-Verlag, 1998
2. Edgar Dehn, *Algebraic Equations An Introduction to the Theories of Lagrange and Galois*, Dover, 1960
3. ガロワと方程式 草場 公邦 著 朝倉書店 2002
4. 代数学 永尾 汎 著 朝倉書店 1992