

連分数展開の考察（平成12年）

1. はじめに

次のものは、高等学校数学から失われたか、またはないものの一部である。

(1) ユークリッドの互除法 (2) 連分数

前者は、古代ギリシャ時代から使われてきた理論で、後者は、高校生には難しく、大学生には易しすぎて敬遠されてきたといはれている。これらは、以前どのように使われてきたか振り返ってみたい。また、古代中国の学者 祖 沖之（430～501）が求めた円周率 $\frac{355}{113} < p < \frac{22}{7}$ の正確さを連分数展開を使って確かめてみる。

随書律歴志にこの円周率の記述があるが、その計算法は記述されていない。この書は、本邦における和算を起こさせるきっかけとなったとされている。³⁾

2. 補助定理 (a, b) : a と b の最大公約数とすると、

$$(a, b) = (b, a) \quad \dots\dots\dots$$

$$(a, b) = (a - b, b) \quad \dots\dots\dots$$

（証明） は自明
 について

a, b の公約数を k とする。

$$a = ka', \quad b = kb' \quad (a', b' : \text{整数})$$

$$a - b = k(a' - b')$$

よって、 $a - b$ と b の公約数は k となる。

逆に、 $a - b$ と b の公約数を d とすると、

$$a - b = db', \quad b = db'' \quad (b', b'' : \text{整数})$$

$$a = b + db' = d(b'' + b')$$

よって、 a と b の公約数の全体は $a - b$ と b の公約数の全体は等しい。

$$(a, b) = (a - b, b)$$

3. ユークリッドの互除法

定理

x_0, x_1 を与えられた整数とする.

x_0 を x_1 で割った商を k_0 , 余りを x_2 とする.

x_1 を x_2 で割った商を k_1 , 余りを x_3 とする.

以下, これを続けていくと,

$$x_0 = k_0 x_1 + x_2 \quad (0 < x_2 < x_1)$$

$$x_1 = k_1 x_2 + x_3 \quad (0 < x_3 < x_2)$$

$$x_2 = k_2 x_3 + x_4 \quad (0 < x_4 < x_3)$$

.....

x_n は次第に小さくなり, 最後に x_{m-1} は x_m で割り切れる。そのとき,

x_m は x_0, x_1 の最大公約数である.

(証明) 補助定理を使って、

$$(x_0, x_1) = (x_0 - x_1, x_1) \quad \text{より}$$

$$= (x_0 - 2x_1, x_1)$$

$$= (x_0 - 3x_1, x_1)$$

.....

$$= (x_0 - k_0x_1, x_1)$$

$$= (x_2, x_1)$$

$$= (x_1, x_2) \quad \text{より}$$

$$= (x_1 - x_2, x_2) \quad \text{より}$$

$$= (x_1 - 2x_2, x_2)$$

$$= (x_1 - 3x_2, x_2)$$

.....

$$= (x_1 - k_1x_2, x_2)$$

$$= (x_3, x_2)$$

$$= (x_2, x_3) \quad \text{より}$$

$$= (x_2 - x_3, x_3) \quad \text{より}$$

.....

$x_1 > x_2 > x_3 > \dots$ 0 より x_n は, 次第に小さくなり,
最後に 0 になることが分かる.

$$(x_0, x_1) = (x_m, 0) = x_m$$

よって, x_m は x_0, x_1 の最大公約数である.

このユークリッドの互除法は, 次のように定式化されている.

例 1 $(39, 90) = 3$

$$\begin{array}{r|l|l|l}
 3 & 39 & 90 & 2 \\
 & \underline{36} & \underline{78} & \\
 & 3 & 12 & 4 \\
 & & \underline{12} & \\
 & & 0 &
 \end{array}$$

例 2 $x^3 - 3x + 2$ と $x^2 - 1$ の最大公約数を求めよ.

$$\begin{array}{r|l|l|l}
 x & x^3 & -3x + 2 & x^2 & -1 & x + 1 \\
 & \underline{x^3} & \underline{-x} & \underline{x^2} & \underline{-x} & \\
 & -2 & -2x + 2 & & x - 1 & 1 \\
 & & \underline{-2x + 2} & & \underline{x - 1} & \\
 & & & & 0 &
 \end{array}$$

最大公約数は $x - 1$

(注) $x^3 - 3x + 2 = (x^2 - 1) \times x - 2(x - 1)$
 $x^2 - 1 = -2(x - 1) \times \frac{x + 1}{-2} + 0$
 $x - 1$ が最大公約数

4. 連分数

次の分数を連分数（正則）という．

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

これを，次のように記す．

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

5. 実数の連分数展開

w : 実数とする．

$$w = k_0 + \frac{1}{w_1}$$

w が整数でないとき， k_0 は w を越えない最大な整数とする．

$$w_1 > 1$$

$$w_1 = k_1 + \frac{1}{w_2}$$

w_1 が整数でないとき， k_1 は w_1 を越えない最大な整数とする．

$$w_2 > 1$$

以下,これを続けていく．

$$w = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{k_{n-1}} + \frac{1}{w_n}}}$$

ただし， $k_n < w_n < k_n + 1$

例 1¹⁾ $\frac{332}{87} = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

3	332	87	1	$k_0 = 3$
	$\frac{261}{71}$	$\frac{71}{16}$		$k_1 = 1$
4	$\frac{64}{7}$	$\frac{14}{2}$	2	$k_2 = 4$
	$\frac{6}{1}$	$\frac{2}{0}$		$k_3 = 2$
3	$\frac{6}{1}$	$\frac{2}{0}$	2	$k_4 = 3$
	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$		$k_5 = 2$

例 2 $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$

$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$	$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}$	$k_0 = 1$
$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$		$k_1 = 2$
$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$		$k_2 = 2$
$= 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$	

1	$\frac{\sqrt{2}}{1}$	$\frac{1}{2\sqrt{2} - 2}$	2	$k_0 = 1$
	$\frac{\sqrt{2} - 1}{6 - 4\sqrt{2}}$	$\frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{10\sqrt{2} - 14}$		$k_1 = 2$
2	$\frac{(\sqrt{2} - 1)^3}{(\sqrt{2} - 1)^3}$	$\frac{(\sqrt{2} - 1)^4}{(\sqrt{2} - 1)^4}$	2	$k_2 = 2$
				$k_3 = 2$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{70}$

例 3¹⁾ p = 3. 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

$$= 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

3	311415926535	10000000000	7	$k_0 = 3$
	300000000000	9911485745		$k_1 = 7$
15	1415926535	88514255	1	$k_2 = 15$
	1327713825	88212710		$k_3 = 1$
292	88212710	301545	1	$k_4 = 292$
	88051140	161570		$k_5 = 1$
	161570	139975		

$$p = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

$\frac{22}{7}$	$\frac{333}{106}$	$\frac{355}{113}$

これが、祖 沖之の円周率に相当する。

補 遺

(1) 古代エジプトおよびギリシャの記数法について

古代エジプト人は、 $\frac{2}{3}$ と一連の単位分数 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... の他は、分数記法を有していなかった。⁴⁾ そこで、

3,200 を 365 で割った数は $8\frac{2}{3}\frac{1}{10}\frac{1}{2190}$ のように $\frac{2}{3}$ と単位分数を用いて記した。⁴⁾

$$\text{(注)} \frac{3200}{365} = 8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2190}$$

古代ギリシャ人も古代エジプトの記法を踏襲して、例えば、かのアルキメデスは、 $\frac{3}{4}$ を 'd' と記している。⁴⁾

$$\text{(注)} \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4},$$

$\frac{1}{2}$ を 'c', $\frac{1}{3}$ を 'b', $\frac{1}{4}$ を 'd', ... と記した。

この記数法は、現在の帯分数の記法として今も残っている。

(注) $2 + \frac{1}{3}$ を 帯分数 $2\frac{1}{3}$ と記している。

参 考 図 書

- | | | | |
|-------------|---------|---------|--------|
| 1) 初等整数論講義 | 高木 貞治 著 | 1 9 3 1 | 共立出版 |
| 2) 数と式 代数入門 | 遠山 啓 著 | 1 9 8 0 | 講談社 |
| 3) 円周率の歴史 | 平山 諦 著 | 1 9 8 0 | 大阪教育図書 |
| 4) ギリシャ数学史 | T・Lヒース著 | 1 9 5 9 | 共立出版 |
- 平田 寛 訳