

「アキレスは亀に追いつくか？ 追い越すことができるか？」

(平成 25 年)

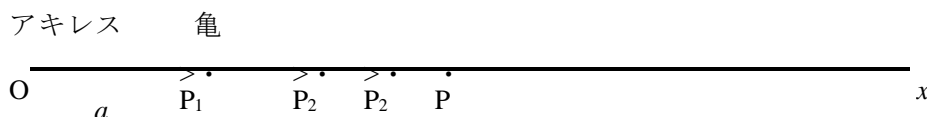
高校生に関数の連続性を教えるとき、ゼノンの背理「アキレスと亀」のパラドックスを解いてみせると良いのではなかろうか。

あるところにアキレスと亀がいて、2匹は徒競走をすることとなった。しかしアキレスの方が足が速いのは明らかなので亀がハンディキャップをもらって、 a だけ進んだ地点 P_1 からスタートすることとなった。

スタート後、アキレスが地点 P_1 に達した時には、亀はアキレスがそこに達するまでの時間分だけ先の地点 P_2 に進んでいる。アキレスが今度は地点 P_2 に達したときには、亀はまたその時間分だけ先の地点 P_3 へ進む。同様にアキレス 地点 P_4 がの時には、亀はさらにその先にいることになる。この考えはいくらでも続けることができ、結果、いつまでたってもアキレスは亀に追いつけない。(Wikipedia より引用)

アキレスの速度 : 1 亀の速度 : v ($0 < v < 1$)

アキレスのハンディ : a とする。



アキレスは原点 0 , 亀は P_1 からはじめる。

アキレスが P_1 に追いつくと、亀は P_2 に進み、アキレスが P_n に追いつくと、亀は P_{n+1} に来る。

$$\begin{aligned} OP_n &= a + av + a v^2 + \cdots + a v^{n-1} \\ &= \frac{a(1 - v^n)}{1 - v} \\ n \rightarrow \infty \text{ のとき } OP_n &\rightarrow \frac{a}{1 - v} = OP \end{aligned}$$

点 P ($\frac{a}{1-v}$) でアキレスは亀に追いつき、以後、アキレスは亀より先に進む。

(注) 極限值: $\lim \frac{a(1 - v^n)}{1 - v} = \frac{a}{1 - v}$: 関数値

連続性が定義されて、アキレスは亀に追いつく。